Varianta 1

KRt

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Să se determine numărul natural n din egalitatea $1+5+9+...+n=231$.

5p **2.** Să se rezolve inecuaţia $2x^2-5x+3\le 0$.

5p **3.** Să se determine inversa funcţiei $f:(0,\infty)\to(1,\infty),\ f(x)=x^2+x+1$.

5p **4.** Se consideră mulţimea $A=\{1,2,3,...,10\}$. Să se determine numărul submulţimilor lui A care au trei elemente, iar suma acestora este număr par.

5p **5.** Să se determine $m\in\mathbb{R}$, astfel încât distanţa dintre punctele $A(2,m)$ şi $B(m,-2)$ să fie 4.

5p **6.** Să se arate că un triunghi ABC în care are loc relaţia $\cos^2 A-\cos^2 B+\cos^2 C=1$ este dreptunghic.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix} a & b\\ b & a\end{pmatrix}$, cu $a,b\in\mathbb{R}$ şi $b\ne 0$.

5p **a)** Să se arate că dacă matricea $X\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ verifică relaţia $AX=XA$, atunci există $u,v\in\mathbb{R}$, astfel încât $X=\begin{pmatrix} u & v\\ v & u\end{pmatrix}$.

5p **b)** Să se arate că $\forall\, n\in\mathbb{N}^*,\ A^n=\begin{pmatrix} x_n & y_n\\ y_n & x_n\end{pmatrix}$, unde $x_n=\dfrac{(a+b)^n+(a-b)^n}{2}$, $y_n=\dfrac{(a+b)^n-(a-b)^n}{2}$.

5p **c)** Să se rezolve în mulţimea $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ ecuaţia $X^3=\begin{pmatrix} 2 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}$.

2. Se consideră $a\in\mathbb{Z}_7$ şi polinomul $f=X^6+aX+\hat{5}\in\mathbb{Z}_7[X]$.

5p **a)** Să se verifice că pentru orice $b\in\mathbb{Z}_7$, $b\ne\hat{0}$, are loc relaţia $b^6=\hat{1}$.

5p **b)** Să se determine $a\in\mathbb{Z}_7$, astfel încât restul împărţirii lui f la $X+\hat{2}$ să fie egal cu $\hat{1}$.

5p **c)** Să se demonstreze că pentru orice $a\in\mathbb{Z}_7$, polinomul f este reductibil peste $\mathbb{Z}_7$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=e^x-ax,$, unde $a\in\mathbb{R}, a>0$.

5p **a)** Să se determine asimptotele oblice ale graficului funcţiei *f*.

5p **b)** Să se determine punctele de extrem local ale funcţiei *f*.

5p **c)** Să se determine $a\in\mathbb{R}$ ştiind că $f(x)\ge 1,\ \forall x\in\mathbb{R}$.

2. Se consideră funcţia $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$.

5p **a)** Să se arate că funcţia $F:(0,\infty)\to\mathbb{R},\ F(x)=2\sqrt{x}(\ln x-2)$, este o primitivă pentru funcţia *f*.

5p **b)** Să se arate că orice primitivă G a funcţiei f este crescătoare pe $[1,\infty)$.

5p **c)** Să se calculeze aria suprafeţei plane cuprinsă între graficul funcţiei f, axa Ox şi dreptele de ecuaţii $x=\dfrac{1}{e}$ şi $x=e$.

Varianta 2

KRtm

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Să se determine numerele complexe z, ştiind că $|z|=1$ şi $(z-1)(\overline{z}+i)\in\mathbb{R}$.

5p **2.** Să se rezolve ecuaţia $\frac{3x-1}{x+1}+\frac{x+1}{2x-1}=3$.

5p **3.** Să se determine inversa funcţiei bijective $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x-\frac{1}{x}$.

5p **4.** Să se determine probabilitatea ca, alegând un număr $\overline{abc}$ din mulţimea numerelor de trei cifre, să avem $a>b$.

5p **5.** Să se calculeze lungimea medianei din A a triunghiului ABC, unde $A(-2,-1), B(2,0), C(0,6)$.

5p **6.** Fie vectorii $\vec{u}=m\vec{i}+3\vec{j}$ şi $\vec{v}=(m-2)\vec{i}-\vec{j}$. Să se determine $m>0$ astfel încât $\vec{u}\perp\vec{v}$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră matricea $A\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $A=\begin{pmatrix}2 & 2\\ 1 & 1\end{pmatrix}$.

5p **a)** Să se arate că există $a\in\mathbb{R}$ astfel încât $A^2=aA$.

5p **b)** Să se determine $\operatorname{rang}(A^{10})$.

5p **c)** Să se demonstreze că dacă $B\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ verifică $\operatorname{rang}(B)=\operatorname{rang}(B^2)$, atunci $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $\operatorname{rang}(B)=\operatorname{rang}(B^n)$.

2. Pentru a,b din mulţimea $M=[0,\infty)$ se defineşte $a*b=\ln(e^a+e^b-1)$.

5p **a)** Să se arate că pentru orice $a,b\in M$, $a*b\in M$.

5p **b)** Să se arate că legea de compoziţie „$*$” este asociativă.

5p **c)** Pentru $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 2$, să se determine $a\in M$ astfel încât $\underbrace{a*a*\ldots*a}_{\text{de } n \text{ ori } a}=2a$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră şirul $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ dat de $a_1\in(0,1)$ şi $a_{n+1}=a_n\left(1-\sqrt{a_n}\right)$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$.

5p **a)** Să se arate că $a_n\in(0,1)$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$.

5p **b)** Să se demonstreze că şirul $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este convergent şi să i se calculeze limita.

5p **c)** Să se arate că şirul $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, dat de $b_n=a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$, este mărginit superior de a_1.

2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{1}{x^2+x+1}$.

5p **a)** Să se arate că $\operatorname{arctg}x+\operatorname{arctg}\frac{1}{x}=\frac{\pi}{2}$, $\forall x>0$.

5p **b)** Să se arate că funcţia $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $F(x)=\frac{2\sqrt{3}}{3}\operatorname{arctg}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right), x\in\mathbb{R}$, este o primitivă pentru funcţia f.

5p **c)** Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}\int_{\frac{1}{n}}^{n}\frac{\operatorname{arctg}x}{x^2+x+1}dx, n\in\mathbb{N}^*$, unde $n\in\mathbb{N}^*$.

Varianta 3

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Să se ordoneze crescător numerele $\sqrt{2}, \sqrt[3]{4}, \sqrt[4]{5}$.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=4x^2-8x+1$. Să se determine valoarea minimă a funcției f.

5p **3.** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $\lg(x-1)+\lg(6x-5)=2$.

5p **4.** Să se determine probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de trei cifre, acesta sa aibă cifrele distincte.

5p **5.** Să se determine coordonatele proiecției punctului $A(6,4)$ pe dreapta $d: 2x-3y+1=0$.

5p **6.** Știind că $a,b\in\left(-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right)$, să se arate că $\operatorname{tg}a\operatorname{tg}b+1>\operatorname{tg}a+\operatorname{tg}b$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}0 & 2\\ -2 & 0\end{pmatrix}$ și $B=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}$.

5p **a)** Să se calculeze $\det(A^2+B^2)$.

5p **b)** Să se justifice că, $\forall X,Y\in M_2(\mathbb{C})$, $\det(X\cdot Y)=\det(X)\cdot\det(Y)$.

5p **c)** Să se arate că, dacă $X,Y\in M_2(\mathbb{R})$ și $X\cdot Y=Y\cdot X$, atunci $\det(X^2+Y^2)\geq 0$.

2. Se consideră cunoscut că $(\mathbb{Z},*,\circ)$ este un inel comutativ, unde $x*y=x+y-3$ și $x\circ y=x\cdot y-3x-3y+12$, $\forall x,y\in\mathbb{Z}$.

5p **a)** Să se arate că elementul neutru al legii de compoziție „$\circ$" este 4.

5p **b)** Să se determine $a,b\in\mathbb{Z}$ astfel încât între inelele $(\mathbb{Z},*,\circ)$ și $(\mathbb{Z},+,\cdot)$ să existe un izomorfism de forma $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$, $f(x)=a\cdot x+b$.

5p **c)** Să se rezolve în mulțimea $\mathbb{Z}$ ecuația $\underbrace{x\circ x\circ\ldots\circ x}_{\text{de 2008 ori } x}=2^{2008}+3$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=18x^2-\ln x$.

5p **a)** Să se determine intervalele de monotonie ale funcției f.

5p **b)** Să se determine valorile lui $a\in\mathbb{R}$ pentru care $f(x)\geq a, \forall x\in(0,\infty)$.

5p **c)** Să se determine numărul de rădăcini reale ale ecuației $f(x)=m$, unde m este un parametru real.

2. Se consideră funcțiile $f_a:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f_a(x)=\frac{1}{|x-a|+3}$, unde $a\in\mathbb{R}$.

5p **a)** Să se arate că, pentru orice $a\in\mathbb{R}$, funcția f_a are primitive strict crescătoare pe $\mathbb{R}$.

5p **b)** Să se calculeze $\int_0^3 f_2(x)dx$.

5p **c)** Să se arate că, pentru orice funcție continuă $f:[0,3]\to\mathbb{R}$, $\lim\limits_{a\to\infty}\int_0^3 f(x)f_a(x)dx=0$.

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Să se rezolve în mulțimea numerelor complexe ecuația $z^3 = \overline{z}$.

5p **2.** Să se arate că vârful parabolei $y = x^2 + 5x + 1$ este situat în cadranul III.

5p **3.** Să se rezolve ecuația $(2+\sqrt{3})^x + (2-\sqrt{3})^x = 14$.

5p **4.** Să se determine probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de trei cifre, acesta să aibă exact două cifre egale.

5p **5.** Să se determine valorile lui $a \in \mathbb{R}$ pentru care vectorii $\vec{u} = (3-2a)\vec{i} + (a+1)\vec{j}$ şi $\vec{v} = (2a+1)\vec{i} + 2\vec{j}$ sunt perpendiculari.

5p **6.** Să se calculeze lungimea laturii BC a triunghiului ascuțitunghic ABC ştiind că $AB = 6$, $AC = 10$ şi aria triunghiului ABC este egală cu $15\sqrt{3}$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

5p **a)** Să se calculeze rangul matricei A.

5p **b)** Să se demonstreze că $\det(A^t \cdot A) \neq \det(A \cdot A^t)$, unde A^t reprezintă transpusa matricei A.

5p **c)** Să se demonstreze că, pentru orice matrice $Y \in M_2(\mathbb{R})$, ecuația $A \cdot X = Y$ are o infinitate de soluții $X \in M_{3,2}(\mathbb{R})$.

2. Se consideră funcțiile bijective $f_0, f_1 : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, f_0(z) = z, f_1(z) = 2z+1$. Pentru $n \in \mathbb{N}^*$, se definesc funcțiile $f_n, f_{-n} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ prin $f_{n+1} = f_1 \circ f_n$, $f_{-n} = f_n^{-1}$. Fie mulțimea de funcții $G = \left\{ f_n : \mathbb{C} \to \mathbb{C} \,\middle|\, n \in \mathbb{Z} \right\}$.

5p **a)** Să se verifice că $f_2(z) = 4z+3,\ \forall z \in \mathbb{C}$.

5p **b)** Să se demonstreze că $(G, \circ)$ este un grup comutativ.

5p **c)** Să se dea un exemplu de subgrup H al lui G cu proprietățile $H \neq \{e\}$ şi $H \neq G$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \setminus \{-1, 0\} \to \mathbb{R}, f(x) = \dfrac{2x+1}{x^2(x+1)^2}$.

5p **a)** Să se determine asimptotele graficului funcției f.

5p **b)** Să se determine punctele de inflexiune ale graficului funcției f.

5p **c)** Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} \left(f(1) + f(2) + f(3) + \ldots + f(n) \right)^{n^2}$, unde $n \in \mathbb{N}^*$.

2. Se consideră $a > 0$ şi şirul $(I_n(a))_{n\in\mathbb{N}^*}, I_n(a) = \int_0^a \dfrac{x^n}{x^n+1}dx,\ n \in \mathbb{N}^*$.

5p **a)** Să se calculeze $I_2(1)$.

5p **b)** Să se arate că $0 \le I_n(1) \le \dfrac{1}{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

5p **c)** Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} I_n(a)$.

Varianta 5

KRt

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Ştiind că $\frac{4}{7}=0,a_1a_2a_3...$, să se determine $a_1+a_2+a_3+...+a_{61}$.

5p **2.** Să se rezolve în $\mathbb{Z}$ inecuaţia $x^2-10x+12\le 0$.

5p **3.** Să se determine inversa funcţiei bijective $f:(1.\infty)\to(0,\infty)$, $f(x)=\ln\frac{x+1}{x-1}$.

5p **4.** Să se determine numărul funcţiilor $f:\{1,2,3,4\}\to\{1,2,3,4\}$ cu proprietatea că $f(1)=f(4)$.

5p **5.** Să se determine coordonatele vârfului D al paralelogramului $ABCD$ dacă $A(-2,9), B(7,-4), C(8,-3)$.

5p **6.** Triunghiul ABC are $B=\frac{\pi}{3}$ şi lungimea razei cercului circumscris egală cu 1. Să se calculeze lungimea laturii AC.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră punctele $A(0, 6)$, $B(1, 4)$, $C(-1, 8)$ şi matricea $M=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & -1 & a\\ 6 & 4 & 8 & b\end{pmatrix}$, unde $a,b\in\mathbb{R}$.

5p **a)** Să se arate că punctele A, B, C sunt coliniare.

5p **b)** Să se verifice că, dacă M^t este transpusa matricei M, atunci $\det(M M^t)\ge 0$.

5p **c)** Să se arate că dacă unul dintre minorii de ordin trei ai lui M care conţin ultima coloană, este nul, atunci $\text{rang}(M)=2$.

2. Se ştie că $(G,\circ)$ este grup, unde $G=(3,\infty)$ şi $x\circ y=(x-3)(y-3)+3$. Se consideră funcţia $f:(0,\infty)\to G$, $f(x)=x+3$.

5p **a)** Să se calculeze $4\circ 5\circ 6$.

5p **b)** Să se demonstreze că funcţia f este un izomorfism de grupuri, de la $((0,\infty),\cdot)$ la $(G,\circ)$.

5p **c)** Să se demonstreze că dacă H este un subgrup al lui G care conţine toate numerele naturale $k\ge 4$, atunci H conţine toate numerele raţionale $q>3$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcţia $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=\ln x-\frac{2(x-1)}{x+1}$.

5p **a)** Să se calculeze derivata funcţiei f.

5p **b)** Să se determine punctele graficului funcţiei f în care tangenta la grafic este paralelă cu dreapta de ecuaţie $9y=2x$.

5p **c)** Să se arate că, dacă $x>1$, atunci $\ln x\ge\frac{2(x-1)}{x+1}$.

2. Se consideră $\alpha>0$, funcţia $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{1}{x^{\alpha}}$ şi şirul $(a_n)_{n\ge1}, a_n=f(1)+f(2)+...+f(n)$.

5p **a)** Să se arate că $f(k+1)\le\int_k^{k+1}f(x)dx\le f(k), \forall k\in(0,\infty)$.

5p **b)** Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}\int_1^n f(x)dx, n\in\mathbb{N}$.

5p **c)** Să se arate că, pentru $\alpha>1$, şirul $(a_n)_{n\ge1}$ este convergent.

Varianta 6

KRtm

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Să se calculeze suma tuturor numerelor naturale de trei cifre care se divid cu 13.

5p **2.** Să se determine funcția f de gradul al doilea dacă $f(-1)=1$, $f(0)=1$, $f(1)=3$.

5p **3.** Să se rezolve în mulțimea $[0,2\pi)$ ecuația $\cos\left(\frac{\pi}{2}-3x\right)=\sin x$.

5p **4.** Câte numere de trei cifre distincte se pot forma cu cifrele $0,2,4,6$ sau 8?

5p **5.** Se consideră triunghiul ABC cu vârfurile în $A(1,2)$, $B(2,-2)$ și $C(4,6)$. Să se calculeze $\operatorname{tg} B$.

5p **6.** Să se calculeze lungimea razei cercului circumscris triunghiului ABC știind că $AB=6$, $C=\frac{\pi}{6}$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră $n\in\mathbb{N}^*$, mulțimea S_n a permutărilor de n elemente și permutarea identică $e=\begin{pmatrix}1 & 2 & \dots & n\\ 1 & 2 & \dots & n\end{pmatrix}$.

5p **a)** Pentru $n=4$ și $\sigma=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 3 & 2 & 4 & 1\end{pmatrix}\in S_4$, să se calculeze σ^4.

5p **b)** Să se demonstreze că pentru orice $\sigma\in S_n$, există $p\in\mathbb{N}^*$, astfel încât $\sigma^p=e$.

5p **c)** Să se arate că pentru $n\geq 3$ există $\sigma\in S_n$, $\sigma\neq e$, astfel încât $\sigma^n=\sigma$.

2. Se consideră $a\in\mathbb{C}$, x_1, x_2, $x_3\in\mathbb{C}$ rădăcinile ecuației $x^3-2x^2+2x-a=0$ și determinantul

$$\Delta=\begin{vmatrix}x_1 & x_2 & x_3\\ x_3 & x_1 & x_2\\ x_2 & x_3 & x_1\end{vmatrix}.$$

5p **a)** Pentru $a=1$, să se rezolve ecuația în mulțimea numerelor complexe.

5p **b)** Să se arate că, pentru orice $a\in\mathbb{R}$, ecuația are o singură rădăcină reală.

5p **c)** Să se arate că valoarea determinantului Δ nu depinde de a.

SUBIECTUL III (30p)

6 **1.** Se consideră funcția $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^{x\cdot\ln x}$.

5p **a)** Să se arate că $f'(x)=f(x)(1+\ln x), \forall x>0$.

5p **b)** Să se arate că funcția f este mărginită inferior.

5p **c)** Să se arate că funcția f este convexă pe $(0;\infty)$.

2. Se consideră funcțiile $f_n, g_n:(-1,\infty)\to\mathbb{R}$, $f_n(x)=\frac{x^{2n}}{1+x}$, $g_n(x)=1-x+x^2-x^3+\dots-x^{2n-1}+f_n(x)$ cu $n\in\mathbb{N}^*$.

5p **a)** Să se calculeze $\int_0^1 g_2(x)dx$.

5p **b)** Să se arate că $0\leq\int_0^1 f_n(x)dx\leq\frac{1}{2n+1}, \forall n\in\mathbb{N}^*$.

5p **c)** Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\dots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}\right), n\in\mathbb{N}$.

Varianta 7

KRt

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Să se determine $a\in\mathbb{R}$ ştiind că $\left\{x\in\mathbb{R}\,\middle|\, x^2-(a+3)x+2a=0\right\}=\left\{1,a^2\right\}$.

5p **2.** Să se determine valoarea maximă a funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=-x^2+6x-9$.

5p **3.** Să se rezolve în mulţimea $[0,2\pi)$ ecuaţia $\sin x=-\dfrac{1}{2}$.

5p **4.** Să se determine $n\in\mathbb{N}^*$ pentru care mulţimea $\{1,2,...,n\}$ are exact 120 de submulţimi cu două elemente.

5p **5.** Se ştie că în triunghiul ABC vectorii $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$ şi $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}$ au acelaşi modul. Să se demonstreze că triunghiul ABC este dreptunghic.

5p **6.** Să se calculeze lungimea razei cercului înscris în triunghiul ABC care are lungimile laturilor egale cu 3, 4 şi 5.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\0&1&2&3\\0&0&1&2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0&0&0&1\end{pmatrix}$ şi sistemul $\begin{cases}x+2y+3z+4t=3\\ \quad y+2z+3t=2\\ \quad\quad z+2t=1\end{cases}$.

5p **a)** Să se determine rangul matricei A.

5p **b)** Să se determine mulţimea soluţiilor sistemului.

5p **c)** Să se demonstreze că ecuaţia $XA=B$ nu are soluţii $X\in\mathcal{M}_{1,3}(\mathbb{C})$.

2. Pentru fiecare $t,n\in\mathbb{Z}$, se consideră matricea $A(n)=\begin{pmatrix}2^n&0&2^n\\0&0&0\\2^n&0&2^n\end{pmatrix}$ şi mulţimile $G=\left\{A(k)\,\middle|\,k\in\mathbb{Z}\right\}$, $H_t=\left\{A(k\cdot t-1)\,\middle|\,k\in\mathbb{Z}\right\}$. Se admite faptul că $(G,\cdot)$ este un grup, unde „$\cdot$" este înmulţirea matricelor.

5p **a)** Să se arate că $\forall\, n,p\in\mathbb{Z}$, $A(n)\cdot A(p)=A(n+p+1)$.

5p **b)** Să se demonstreze că, pentru orice $t\in\mathbb{Z}$, H_t este un subgrup al grupului $(G,\cdot)$.

5p **c)** Să se demonstreze că grupurile $(G,\cdot)$ şi $(\mathbb{Z},+)$ sunt izomorfe.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcţia $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=\ln x$ şi şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, $x_n=1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+...+\dfrac{1}{n}-\ln n, \forall n\in\mathbb{N}^*$.

5p **a)** Să se arate că, pentru orice $k>0$, $\dfrac{1}{k+1}<f(k+1)-f(k)<\dfrac{1}{k}$.

5p **b)** Să se arate că şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este descrescător şi are termenii pozitivi.

5p **c)** Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2}+\dfrac{1}{n+3}+...+\dfrac{1}{3n}\right), n\in\mathbb{N}^*$.

2. Se consideră funcţiile $F:(-1,\infty)\to\mathbb{R}, F(x)=a\ln(x+1)+b\ln(x^2+1)+c\,\mathrm{arctg}\,x$ şi $f:(-1,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{2x}{(x+1)(x^2+1)}$.

5p **a)** Să se determine $a,b,c\in\mathbb{R}$, astfel încât F să fie o primitivă a funcţiei f.

5p **b)** Să se calculeze $\int_0^1 f(x)dx$.

5p **c)** Să se studieze monotonia funcţiei F, în cazul în care ea este primitivă a funcţiei f.

Varianta 8

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Ştiind că $z\in\mathbb{C}$ şi $z^2+z+1=0$, să se calculeze $z^{2008}+\frac{1}{z^{2008}}$.

5p **2.** Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=ax^2+x+c$. Ştiind că punctele $A(1,2)$ şi $B(0,3)$ aparţin graficului funcţiei f, să se determine numerele reale a şi c.

5p **3.** Să se rezolve ecuaţia $\sqrt[3]{7x+1}-x=1$.

5p **4.** Câte numere de patru cifre distincte se pot forma cu cifre din mulţimea $\{1,3,5,7,9\}$?

5p **5.** Se consideră paralelogramul $ABCD$ şi punctele E şi F astfel încât $\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{EB}$, $\overrightarrow{DF}=2\overrightarrow{FE}$. Să se demonstreze că punctele A, F şi C sunt coliniare.

5p **6.** Să se calculeze lungimile înălţimilor unui triunghi, dacă lungimile laturilor sale sunt 13, 14 şi 15.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră mulţimea M a matricelor cu 3 linii şi cu 3 coloane, cu elemente din $\{-1,1\}$ şi matricele $I_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$, $A=\begin{pmatrix}1&-1&-1\\-1&1&-1\\-1&-1&1\end{pmatrix}$ şi $B=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}$.

5p **a)** Să se dea un exemplu de matrice inversabilă din mulţimea M.

5p **b)** Să se demonstreze că $\forall\, n\in\mathbb{N}^*$, $A^n=2^n\cdot I_3+\frac{(-1)^n-2^n}{3}\cdot B$.

5p **c)** Să se determine suma tuturor matricelor din mulţimea M.

2. Se consideră $a\in\mathbb{R}$ şi ecuaţia $x^3-x+a=0$, cu rădăcinile complexe x_1, x_2, x_3.

5p **a)** Să se calculeze $(x_1+1)(x_2+1)(x_3+1)$.

5p **b)** Să se demonstreze că, dacă a este întreg impar, atunci ecuaţia nu are rădăcini raţionale.

5p **c)** Să se determine valorile lui a pentru care x_1, x_2, x_3 sunt numere întregi.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x+\cos x$ şi şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $x_0\in(0;\pi)$, $x_{n+1}=f(x_n)$, $\forall n\in\mathbb{N}$.

5p **a)** Să se arate că funcţia f este strict crescatoare pe $\mathbb{R}$.

5p **b)** Să se arate că $x_n\in(0,\pi)$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$.

5p **c)** Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

2. Se consideră şirul de numere reale $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$, definit de $I_0=\frac{\pi}{2}$ şi $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x\,dx, n\in\mathbb{N}^*$.

5p **a)** Să se calculeze I_2.

5p **b)** Să se arate că $I_n=\frac{n-1}{n}I_{n-2}, \forall n\in\mathbb{N}, n\geq 2$.

5p **c)** Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}(nI_nI_{n+1})$.

Variant 9

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Să se determine numerele complexe z pentru care $z-1, 2i$ şi $z+1$ sunt afixele vârfurilor unui triunghi echilateral.

5p **2.** Să se determine valorile lui $a\in\mathbb{R}$ pentru care ecuaţia $ax^2+(3a-1)x+a+3=0$ are rădăcini reale.

5p **3.** Să se rezolve în mulţimea $[0,2\pi]$ ecuaţia $\cos 4x=1$.

5p **4.** Să se determine numărul funcţiilor $f:\{1,2,3,4,5\}\to\{1,2,3,4,5\}$ cu proprietatea că $f(1)=f(2)$.

5p **5.** Să se calculeze lungimea razei cercului înscris într-un triunghi care are lungimile laturilor $13, 14, 15$.

5p **6.** Triunghiul ABC are $B=\frac{\pi}{6}, C=\frac{\pi}{4}$. Să se demonstreze că $\frac{AB}{AC}=\sqrt{2}$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}$, $E_1=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}$, $E_2=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ şi $n\in\mathbb{N}^*$.

5p **a)** Să se calculeze A^4.

5p **b)** Dacă matricea $B\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ verifică relaţiile $B\cdot E_1=E_1\cdot B$ şi $B\cdot E_2=E_2\cdot B$, să se demonstreze că există $a\in\mathbb{R}$, astfel încât $B=\begin{pmatrix}a & 0\\ 0 & a\end{pmatrix}$.

5p **c)** Să se demonstreze că dacă $\forall\, X\in M_2(\mathbb{R})$, $A^n\cdot X=X\cdot A^n$, atunci există $k\in\mathbb{N}^*$ astfel încât $n=4k$.

2. Se consideră polinomul $f=2X^4+aX^3+3X^2+bX+c\in\mathbb{R}[X]$, cu rădăcinile $x_1,x_2,x_3,x_4\in\mathbf{C}$.

5p **a)** Să se afle rădăcinile lui *f* în cazul $a=b=0,\ c=-5$.

5p **b)** Să se verifice că

$$(x_1-x_2)^2+(x_1-x_3)^2+(x_1-x_4)^2+(x_2-x_3)^2+(x_2-x_4)^2+(x_3-x_4)^2=\frac{3}{4}\left(a^2-16\right).$$

5p **c)** Pentru $a=4$, să se determine $b,c\in\mathbb{R}$ astfel încât polinomul să aibă toate rădăcinile reale.

SUBIECTUL III (30p)

1. Pentru fiecare $n\in\mathbb{N}^*$ se consideră funcţia, $f_n:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f_n(x)=x-\sin x-n$.

5p **a)** Să se arate că funcţia f_n este bijectivă.

5p **b)** Să se arate că, dacă se notează x_n, unica soluţie a ecuaţiei $f_n(x)=0$, şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este nemărginit.

5p **c)** Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n}{n}$, unde şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ a fost definit la b).

2. Fie funcţiile $f,g_n,F_n:[0,1)\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{1}{1-x}, g_n(x)=\frac{x^n}{1-x}, F_n(x)=\int_0^x (f(t)-g_n(t))dt$, unde $n\in\mathbb{N}^*$.

5p **a)** Să se calculeze $F_2(x), x\in[0;1)$.

5p **b)** Să se arate că $0\leq\int\limits_0^x g_n(t)dt\leq\frac{x^{n+1}}{1-x}, \forall\, x\in[0;1), \forall\, n\in\mathbb{N}^*$.

5p **c)** Să se arate că $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 3^2}+\frac{1}{3\cdot 3^3}+\ldots+\frac{1}{n\cdot 3^n}\right)=-\ln\frac{2}{3}$.

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Să se rezolve în mulţimea numerelor complexe ecuaţia $z^5 = \bar{z}$.

5p **2.** Să se determine funcţia f de gradul întâi pentru care $f(f(x)) = 2f(x) + 1$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$.

5p **3.** Să se rezolve ecuaţia $\lg(x+1) - \lg 9 = 1 - \lg x$.

5p **4.** Să se determine numărul termenilor iraţionali din dezvoltarea $\left(3 + \sqrt[3]{3}\right)^{2008}$.

5p **5.** Să se determine valorile lui $a \in \mathbb{R}$ pentru care vectorii $\vec{u} = (a-2)\vec{i} + 3\vec{j}$ şi $\vec{v} = 8\vec{i} - (20-2a)\vec{j}$ sunt coliniari.

5p **6.** Să se arate că vectorii $\vec{u} = 5\vec{i} - 4\vec{j}$ şi $\vec{v} = 2\vec{i} + 3\vec{j}$ formează un unghi obtuz.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră permutările $e, \alpha \in S_3$, $e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

5p **a)** Să se rezolve ecuaţia $\alpha^{2008} \cdot x = e$, $x \in S_3$.

5p **b)** Să se calculeze $\sum_{\sigma \in S_3} m(\sigma)$. (S-a notat cu $m(\sigma)$ numărul inversiunilor permutării $\sigma \in S_3$)

5p **c)** Să se demonstreze că, oricare ar fi ordinea factorilor, produsul tuturor permutărilor din S_3 este diferit de permutarea identică $e \in S_3$.

2. Pentru fiecare $a \in \mathbb{Z}_5$ se consideră matricea $A(a) \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z}_5)$, $A(a) = \begin{pmatrix} a & \hat{2} \\ \hat{2} & a \end{pmatrix}$.

5p **a)** Să se verifice că $\forall x \in \mathbb{Z}_5$, $x^5 = x$.

5p **b)** Să se demonstreze că $\forall a \in \mathbb{Z}_5$, $(A(a))^5 = A(a)$.

5p **c)** Să se determine valorile lui $a \in \mathbb{Z}_5$ pentru care $(A(a))^{2008} = A(a)$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x \operatorname{arctg} x - \ln\left(1 + x^2\right)$.

5p **a)** Să se arate că funcţia f este convexă pe $\mathbb{R}$.

5p **b)** Să se arate că funcţia f' este mărginită.

5p **c)** Să se demonstreze că $f(x) \ge 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

2. Pentru $a > 0$ se consideră şirul $\left(I_n(a)\right)_{n \ge 1}, I_n(a) = \int_0^a \frac{x^n}{1 + x^{2n}} dx, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

5p **a)** Să se calculeze $I_1(1)$.

5p **b)** Să se arate că $0 \le I_n(1) \le \frac{1}{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

5p **c)** Să se calculeze $\lim_{n \to \infty} I_n(a)$.

Varianta 11

KRIt

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Să se determine $a, b \in \mathbb{R}$ ştiind că numerele $2,\ a,\ b$ sunt în progresie geometrică şi $2,\ 17,\ a$ sunt în progresie aritmetică.

5p **2.** Să se rezolve ecuaţia $f(f(x)) = 0$ ştiind că $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^2 - 3x + 2$.

5p **3.** Să se rezolve în mulţimea $[0, 2\pi)$ ecuaţia $\operatorname{tg}(-x) = 1 - 2\operatorname{tg} x$.

5p **4.** Să se determine numărul funcţiilor $f : \{0,1,2\} \to \{0,1,2\}$ care verifică relaţia $f(0)f(1)f(2) = 0$.

5p **5.** Se consideră triunghiul ABC şi punctele D, E astfel încât $\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{DB},\ \overrightarrow{AE} = 2\overrightarrow{EC}$. Să se arate că dreptele DE şi BC sunt paralele.

5p **6.** Să se calculeze lungimea razei cercului circumscris triunghiului ABC ştiind că $A = \frac{\pi}{4},\ B = \frac{\pi}{6}$ şi $AB = 6$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Pentru $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & -d & c \\ -c & d & a & -b \\ -d & -c & b & a \end{pmatrix}$ şi matricea transpusă A^t.

5p **a)** Pentru $a = c = 1$ şi $b = d = 0$, să se calculeze $\det(A)$.

5p **b)** Să se arate că $A \cdot A^t = \alpha \cdot I_4$, unde $\alpha = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$.

5p **c)** Să se demonstreze că dacă $A \neq O_4$, atunci A este inversabilă.

2. Se consideră $a, b, c \in \mathbb{R}$ şi polinomul $f = X^3 + aX^2 + bX + c$, cu rădăcinile $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{C}$, astfel încât $|x_1| \le 1,\ |x_2| \le 1,\ |x_3| \le 1$.

5p **a)** Să se demonstreze că $|a| \le 3$.

5p **b)** Să se arate că, dacă $c < 0$, polinomul are cel puţin o rădăcină reală în intervalul $(0, \infty)$.

5p **c)** Să se arate că, dacă $a = 1,\ c = -1$, atunci $b = -1$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} - \{-2\} \to \mathbb{R},\ f(x) = \frac{1}{x+2} e^{|x|}$.

5p **a)** Să se studieze derivabilitatea funcţiei f.

5p **b)** Să se determine punctele de extrem local ale funcţiei f.

5p **c)** Să se determine numărul de rădăcini reale ale ecuaţiei $f(x) = m$, cu $m \in \mathbb{R}$.

2. Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \sin x - x + \frac{x^3}{6}$ şi limita $L = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \int_x^1 \frac{\sin t}{t} dt$.

Se admite cunoscut faptul că $f(x) \ge 0, \forall x \ge 0$.

5p **a)** Să se calculeze $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx$.

5p **b)** Să se justifice existenţa limitei L.

5p **c)** Să se arate că $0{,}9 < L < 1$.

Varianta 12

KRt

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Să se calculeze suma primilor 20 de termeni ai progresiei aritmetice $(a)_{n\geq 1}$, ştiind că $a_4 - a_2 = 4$ şi $a_1 + a_3 + a_5 + a_6 = 30$.

5p **2.** Să se rezolve ecuaţia $\frac{x+1}{x+2} + \frac{x+2}{x+3} = \frac{7}{6}$.

5p **3.** Să se rezolve în mulţimea $[0, 2\pi)$ ecuaţia $\cos 2x = \frac{1}{2}$.

5p **4.** Să se determine $a > 0$ ştiind că termenul din mijloc al dezvoltării $\left(\sqrt[3]{a} + \frac{1}{\sqrt[4]{a}}\right)^{12}$ este egal cu 1848.

5p **5.** Să se determine ecuaţia simetricei dreptei $d: 2x - 3y + 1 = 0$ faţă de punctul $A(-3, 4)$.

5p **6.** Se consideră trapezul $ABCD$ în care $AB \parallel CD$ şi $AC \cap BD = \{O\}$. Fie S_1, S_2, respectiv S_3 ariile triunghiurilor AOB, BOC, respectiv COD. Să se demonstreze că $S_2^2 = S_1 S_3$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră polinoamele $f, g \in \mathbb{R}[X]$, $f = X^2 + X + 1$, cu rădăcinile x_1, x_2 şi $g = aX^2 + bX + c$, cu $a \neq 0$. Fie matricele $A, V \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$, $A = \begin{pmatrix} c & b & a \\ a & c & b \\ b & a & c \end{pmatrix}$ şi $V = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & x_1 & x_2 \\ 1 & x_1^2 & x_2^2 \end{pmatrix}$.

5p **a)** Să se arate că $\det(V) = 3(x_2 - x_1)$.

5p **b)** Să se arate că $A \cdot V = \begin{pmatrix} g(1) & g(x_1) & g(x_2) \\ g(1) & x_1 g(x_1) & x_2 g(x_2) \\ g(1) & x_1^2 g(x_1) & x_2^2 g(x_2) \end{pmatrix}$.

5p **c)** Să se arate că $\det(A) = 0$ dacă şi numai dacă $a + b + c = 0$ sau $a = b = c$.

2. Se consideră $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, corpul $(\mathbb{Z}_5, +, \cdot)$ al claselor de resturi modulo 5 şi funcţia $f: \mathbb{Z}_5 \to \mathbb{Z}_5$, $f(x) = x^n + \hat{4}x$.

5p **a)** Să se calculeze $f(\hat{0})$ şi $f(\hat{1})$.

5p **b)** Să se arate că funcţia *f* nu este surjectivă.

5p **c)** Să se arate că, pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, există un polinom de grad n cu coeficienţi în $\mathbb{Z}_5$ care nu are nicio rădăcină în mulţimea $\mathbb{Z}_5$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcţia $f: (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = (x+1)^{\frac{1}{x}}$.

5p **a)** Să se arate că $x - (x+1)\ln(x+1) < 0, \forall x > 0$.

5p **b)** Să se calculeze $\lim\limits_{x \to \infty} f(x)$.

5p **c)** Să se arate că funcţia f este descrescătoare.

2. Se consideră funcţia $f: [1, \infty) \to \mathbb{R}, f(x) = \int_0^1 e^{-t} t^{x-1} dt, \forall x > 1$ şi $f(1) = 1 - \frac{1}{e}$.

5p **a)** Să se calculeze $f(2)$.

5p **b)** Să se demonstreze relaţia $f(x+1) = xf(x) - \frac{1}{e}, \forall x > 1$.

5p **c)** Să se demonstreze relaţia $f(n+1) = \frac{n!}{e}\left(e - \frac{1}{0!} - \frac{1}{1!} - \frac{1}{2!} - \ldots - \frac{1}{n!}\right), \forall n \in \mathbb{N}$.

Variante 13

SUBIECTUL I (30p)

5p 1. Să se determine $n \in \mathbb{Z}$ pentru care are loc egalitatea $(1+i\sqrt{3})^n + (1-i\sqrt{3})^n = 2^n$.

5p 2. Să se rezolve în $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ sistemul de ecuații $\begin{cases} x+y=4 \\ xy=3 \end{cases}$.

5p 3. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $x = 6\left(\sqrt{x-2}-1\right)$.

5p 4. Să se determine termenul care nu conține pe x din dezvoltarea $\left(x^2+\frac{1}{x}\right)^9$.

5p 5. Să se calculeze distanța de la punctul $A(3,0)$ la dreapta $d: 3x-4y+1=0$.

5p 6. Triunghiul ABC are $AB=4, BC=5$ și $CA=6$. Să se arate că $B=2C$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră sistemul de ecuații $\begin{cases} x-y+z=1 \\ x+y+z=3 \\ mx+y+z=3m \end{cases}$, unde $m \in \mathbb{R}$. Pentru fiecare $m \in \mathbb{R}$, notăm cu S_m mulțimea soluțiilor reale ale sistemului.

5p a) Să se determine valorile lui $m \in \mathbb{R}$ pentru care sistemul are soluție unică.

5p b) Să se arate că pentru orice $m \in \mathbb{R}$ sistemul este compatibil.

5p c) Să se determine $\min\left\{x^2+y^2+z^2 \mid (x,y,z) \in S_1\right\}$

2. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $I_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $C=A\cdot B$ și mulțimea

$G=\left\{X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C}) \,\middle|\, \det(X)=1\right\}$.

5p a) Să se verifice că $A^4 = B^6 = I_2$.

5p b) Să se arate că $(G,\cdot)$ este un subgrup al grupului multiplicativ al matricelor inversabile de ordin doi, cu coeficienți complecși.

5p c) Să se demonstreze că, în grupul $(G,\cdot)$, C nu are ordin finit.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt[3]{x^3+3x^2-4}$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

5p a) Să se determine asimptota oblică a graficului funcției f spre ∞.

5p b) Să se arate că $f(x)f'(x) = x\sqrt[3]{\frac{x+2}{x-1}}, \forall x \in \mathbb{R}-\{-2, 1\}$.

5p c) Să se determine derivatele laterale ale funcției în punctul $x_0=-2$.

2. Pentru $n \in \mathbb{N}^*$ se consideră funcția $F_n:(0,\infty)\to\mathbb{R}, F_n(x)=\int_0^x t^n e^{-t}dt,\ x>0$.

5p a) Să se calculeze $F_1(x), x>0$.

5p b) Să se determine punctele de inflexiune ale graficului funcției F_n.

5p c) Să se arate că $\lim_{x\to\infty} F_n(x) = n!$.

Varianta 14

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Să se calculeze $\lg\frac{1}{2}+\lg\frac{2}{3}+\lg\frac{3}{4}+...+\lg\frac{99}{100}$.

5p **2.** Să se determine $a\in\mathbb{R}$ pentru care inecuația $ax^2+2(a+1)x+2a-1\geq 0$ nu are soluții în mulțimea numerelor reale.

5p **3.** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt[3]{1-3x}+\sqrt[3]{8-x}=\sqrt[3]{9-4x}$.

5p **4.** Să se determine numărul elementelor unei mulțimi știind că aceasta are exact 121 de submulțimi cu cel mult două elemente.

5p **5.** Să se determine ecuația dreptei AB știind că $A(2,3)$ și $B(-5,4)$.

5p **6.** Triunghiul ABC ascuțitunghic are $AC=2\sqrt{3}$ și lungimea razei cercului circumscris egală cu 2. Să se calculeze $m(\sphericalangle B)$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix} a & b & c \\ ma & mb & mc \\ na & nb & nc \end{pmatrix}$, unde $a,b,c,m,n\in\mathbb{C}$.

5p **a)** Să se arate că există $d\in\mathbb{C}$ astfel încât $A^2=dA$.

5p **b)** Să se indice două matrice linie $K,L\in\mathcal{M}_{1,3}(\mathbb{C})$ astfel încât $A=K^tL$, unde K^t este transpusa matricei K.

5p **c)** Să se arate că, dacă $a+bm+cn\neq -1$, atunci există $x,y\in\mathbb{C}$ astfel încât $(I_3+A)^{-1}=xI_3+yA$.

2. Se consideră numărul $a=\sqrt{3}-i\in\mathbb{C}$ și polinomul $f\in\mathbb{Q}[X]$, $f=X^4-4X^2+16$.

5p **a)** Să se arate că $f(a)=0$.

5p **b)** Să se determine rădăcinile polinomului *f*.

5p **c)** Să se demonstreze că dacă polinomul $h\in\mathbb{Q}[X]$ cu $\text{grad}(h)\leq 3$ are rădăcina *a*, atunci h este polinomul nul.

SUBIECTUL III (30p)

1. Pentru $n\in\mathbb{N}^*$ se consideră funcția $f_n:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f_n(x)=\sin^n x$ și se notează cu x_n abscisa punctului de inflexiune a graficului funcției din intervalul $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.

5p **a)** Să se determine punctele de extrem ale funcției f_2, situate în intervalul $[0,2\pi]$.

5p **b)** Să se arate că $\sin x_n=\sqrt{\frac{n-1}{n}},\ n\geq 2$.

5p **c)** Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)$.

2. Se consideră $a\in\mathbb{R}$ și funcțiile $f,F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{x^3-3x+a}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}, F(x)=\frac{x^2+ax+5}{\sqrt{x^2+1}}, \forall x\in\mathbb{R}$.

5p **a)** Să se arate că funcția F este o primitivă pentru funcția f.

5p **b)** Pentru $a=2$, să se determine aria suprafeței plane cuprinsă între graficul functiei f, axa Ox și dreptele $x=1$ și $x=2$.

5p **c)** Să se determine a astfel încât $\int_0^2 F(x)dx-\int_{-2}^0 F(x)dx=2$.

Varianta 15

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Să se calculeze $\log_3\left(5-\sqrt{7}\right)+\log_3\left(5+\sqrt{7}\right)-\log_3 2$.

5p **2.** Să se determine funcția de gradul al doilea al cărei grafic este tangent la axa Ox în punctul $(1,0)$ şi trece prin punctul $(0,2)$.

5p **3.** Să se rezolve în mulțimea $[0,2\pi)$ ecuația $\sin x+\cos x=1$.

5p **4.** Câte numere de patru cifre, nu neapărat distincte, se pot forma cu cifre din mulțimea $\{1,3,5,7,9\}$?

5p **5.** Să se determine ecuația dreptei care conține punctul $A(-2,2)$ şi este paralelă cu dreapta determinată de punctele $C(2,1)$, $D(-1,-3)$.

5p **6.** Fie $\alpha\in\left(\pi,\frac{3\pi}{2}\right)$ astfel încât $\cos\alpha=-\frac{5}{13}$. Să se calculeze $\sin\alpha$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră mulțimea M a matricelor cu 3 linii şi cu 3 coloane, cu elemente din mulțimea $\{-1,1\}$.

5p **a)** Să se dea un exemplu de matrice de rang 2 din mulțimea M.

5p **b)** Să se demonstreze că, oricum s-ar alege două matrice din mulțimea M, produsul acestora este diferit de matricea nulă.

5p **c)** Să se determine numărul tuturor matricelor din mulțimea M.

2. Se consideră polinomul $f\in\mathbb{R}[X]$, $f=X^4-5X^2+5$, cu rădăcinile $x_1,x_2,x_3,x_4\in\mathbb{C}$.

5p **a)** Să se calculeze $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}+\frac{1}{x_4}$.

5p **b)** Să se arate că f are toate rădăcinile reale.

5p **c)** Să se arate că dacă g este un polinom cu coeficienți reali care are proprietatea că pentru orice x real $|g(x)|\le|f(x)|$, atunci există $a\in[-1,1]$ astfel încât $g=af$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Pentru fiecare $n\in\mathbb{N}$, $n\ge 2$, se consideră funcția $f_n:[0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f_n(x)=x^n-nx+1$.

5p **a)** Să se arate că f_n este strict descrescătoare pe $(0;1]$ şi strict crescătoare pe $[1;\infty)$.

5p **b)** Să se arate că ecuația $f_n(x)=0,\ x>0$ are două rădăcini $a_n\in(0,1)$ şi $b_n\in(1,\infty)$.

5p **c)** Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$, unde a_n a fost definit la punctul b).

2. Se consideră şirul $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$, unde $I_0=\int_0^1\frac{1}{x^2+1}dx$ şi $I_n=\int_0^1\frac{x^n}{x^2+1}dx,\ n\in\mathbb{N}^*$.

5p **a)** Să se arate că $I_0=\frac{\pi}{4}$.

5p **b)** Să se arate că $I_{2n}=\frac{1}{2n-1}-I_{2n-2},\forall n\in\mathbb{N},n\ge 2$.

5p **c)** Să se arate că $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+...+(-1)^{n-1}\frac{1}{2n-1}\right)=I_0$.

Varianta 16

KRt

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ este dat de $a_1 = 2$, $a_n = a_{n-1} + n^2 + n,\ n \geq 2$. Să se arate că $a_n = \dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

5p **2.** Să se determine valorile lui $a \in \mathbb{R}$ pentru care $\dfrac{x^2 + ax + 2}{x^2 + 1} \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

5p **3.** Să se rezolve ecuația $\arcsin \dfrac{2 - x}{1 + x^2} = \dfrac{\pi}{2}$.

5p **4.** Să se rezolve ecuația $C_n^8 = C_n^{10}$.

5p **5.** Să se determine cel mai mare unghi al triunghiului ABC ştiind că $A(2,-2)$, $B(2,3)$, $C(-2,3)$.

5p **6.** Fie $\alpha \in \left(\dfrac{\pi}{2}, \pi\right)$ astfel încât $\sin\alpha = \dfrac{3}{5}$. Să se calculeze $\sin 2\alpha$.

SUBIECTUL II (30p)

1. e consideră mulțimea $G = \left\{ X = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \middle|\ a, b \in \mathbb{R},\ a > 0 \right\}$.

5p **a)** Să se arate că dacă $A, B \in G$, atunci $AB \in G$.

5p **b)** Să se găsească două matrice $C, D \in G$ pentru care $CD \neq DC$.

5p **c)** Să se arate că dacă $A \in G$, atunci $I_2 - A + A^2 - \ldots + A^{2008} \in G$.

2. Se consideră $a, b, c \in \mathbb{Q}$ şi polinomul $f = X^3 + aX^2 + bX + c$.

5p **a)** Să se determine a, b, c astfel încât polinomul *f* să aibă rădăcinile $x_1 = x_2 = 1$ şi $x_3 = -2$.

5p **b)** Să se arate că dacă *f* are rădăcina $\sqrt{2}$, atunci *f* are o rădăcină rațională.

5p **c)** Să se arate că dacă $a, b, c \in \mathbb{Z}$ iar numerele $f(0)$ şi $f(1)$ sunt impare, atunci polinomul *f* nu are rădăcini întregi.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \dfrac{1}{x^2}, & x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \\ 0, & x = 0 \end{cases}$.

5p **a)** Să se arate că funcția *f* este derivabilă pe $\mathbb{R}$.

5p **b)** Să se calculeze $\lim\limits_{x \to \infty} f'(x)$.

5p **c)** Să se demonstreze că derivata funcției *f* este nemărginită pe $\mathbb{R}$.

2. Pentru fiecare $n \in \mathbb{N}^*$ se consideră $I_n = \displaystyle\int_0^1 x(1-x)^n\, dx$.

5p **a)** Să se calculeze I_2.

5p **b)** Să se arate că $I_n = \dfrac{1}{(n+1)(n+2)}$, unde $n \in \mathbb{N}^*$.

5p **c)** Să se demonstreze relația $\dfrac{C_n^0}{2} - \dfrac{C_n^1}{3} + \dfrac{C_n^2}{4} - \ldots + (-1)^n \dfrac{C_n^n}{n+2} = \dfrac{1}{(n+1)(n+2)}, \forall n \in \mathbb{N}$.

Varianta 17

KRtm

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Să se determine partea imaginară a numărului $\left(1+i\sqrt{3}\right)^3$.

5p **2.** Să se determine imaginea funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\dfrac{x^2-x+2}{x^2+1}$.

5p **3.** Să se rezolve ecuaţia $\sqrt[3]{x}+\sqrt{x+1}=5$.

5p **4.** Să se determine probabilitatea ca, alegând un număr $\overline{abc}$ din mulţimea numerelor de trei cifre, să avem $a<b<c$.

5p **5.** Să se determine ecuaţia dreptei care trece prin punctul $A(-1,1)$ şi este perpendiculară pe dreapta $d:5x-4y+1=0$.

5p **6.** Să se calculeze perimetrul triunghiului ABC ştiind că $AB=6$, $B=\dfrac{\pi}{4}$ şi $C=\dfrac{\pi}{6}$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 0 & -1\end{pmatrix}$ şi $B=\begin{pmatrix}-3 & -8\\ 1 & 3\end{pmatrix}$.

5p **a)** Să se calculeze A^2-B^2.

5p **b)** Să se determine $n\in\mathbb{N}^*$ pentru care $\det\left(A+A^2+A^3+...+A^n\right)=0$.

5p **c)** Să se arate că există o infinitate de perechi de matrice (X,Y), astfel încât $X,Y\in\mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$, $XY\neq YX$ şi $X^2=Y^2=I_2$.

2. Se consideră polinoamele $f,g\in\mathbb{Q}[X]$, $f=X^4+X^3+X^2+X+1$, cu rădăcinile $x_1,x_2,x_3,x_4\in\mathbb{C}$ şi $g=X^3+2X^2+3X+4$.

5p **a)** Să se determine restul împărţirii polinomului f la polinomul g.

5p **b)** Să se calculeze $(1-x_1)\cdot(1-x_2)\cdot(1-x_3)\cdot(1-x_4)$.

5p **c)** Să se calculeze $g(x_1)\cdot g(x_2)\cdot g(x_3)\cdot g(x_4)$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, unde $x_1\in(0,1)$ şi $x_{n+1}=\dfrac{x_n{}^5+3x_n}{4}$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$.

5p **a)** Să se arate că $x_n\in(0,1)$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$.

5p **b)** Să se arate că şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este convergent.

5p **c)** Pentru $p\in\mathbb{N}$, fixat, să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_{n+p}}{x_n}$.

2. Se consideră funcţiile $f_n:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f_n(x)=\dfrac{1}{n^2+x^2},\ n\in\mathbb{N}^*$.

5p **a)** Să se calculeze aria mulţimii cuprinse între graficul funcţiei f_1, axele de coordonate şi dreapta $x=1$.

5p **b)** Să se calculeze $\int_0^1 x\left(f_1(x)\right)^2dx$.

5p **c)** Să se arate că $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(f_n(1)+f_n(2)+f_n(3)+...+f_n(n)\right)=\dfrac{\pi}{4}$.

Varianta 18

KRt

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Să se rezolve în mulțimea numerelor complexe ecuația $x^6 - 9x^3 + 8 = 0$.

5p **2.** Să se determine $a, b \in \mathbb{R}$ știind că $f : [-2, 2] \to [a, b]$, $f(x) = x^2 - 3x + 2$ reprezintă o funcție surjectivă.

5p **3.** Să se rezolve ecuația $\arcsin x + \arccos \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{2}$.

5p **4.** Să se determine probabilitatea ca, alegând două numere din mulțimea $\{0, 1, 2, ..., 9\}$, cel puțin un număr să fie prim.

5p **5.** Să se determine coordonatele ortocentrului triunghiului ABC știind că $A(-1, 0)$, $B(0, 2)$, $C(2, -1)$.

5p **6.** Să se calculeze $\overrightarrow{AB} \cdot \left(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC}\right)$, știind că $A(-3, 4)$, $B(4, -3)$ și $C(1, 2)$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră matricele $A, B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$, astfel încât $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ și $B^3 = 0_3$.

5p **a)** Să se calculeze A^3.

5p **b)** Să se demonstreze că $\forall x \in \mathbb{C}$, $(I_3 - xB)\left(I_3 + xB + x^2B^2\right) = I_3$.

5p **c)** Să se demonstreze că $\forall x \in \mathbb{C}$, $\det(I_3 - xB) = 1$.

2. Se consideră polinomul $f = X^4 + 4aX^3 + 24X^2 + bX + c \in \mathbb{R}[X]$, cu rădăcinile $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{C}$.

5p **a)** Să se determine x_1, x_2, x_3, x_4 în cazul $a = 6, b = 1, c = 0$.

5p **b)** Să se demonstreze că

$$(x_1 - x_2)^2 + (x_1 - x_3)^2 + (x_1 - x_4)^2 + (x_2 - x_3)^2 + (x_2 - x_4)^2 + (x_3 - x_4)^2 = 48\left(a^2 - 4\right).$$

5p **c)** Dacă $|a| \geq 2$, să se demonstreze că există $b, c \in \mathbb{R}$ astfel încât polinomul *f* să aibă o rădăcină dublă egală cu $-a$ și celelalte două rădăcini să fie reale.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f : [0, \infty) \to [0, \infty), f(x) = \frac{2x + 1}{x + 2}$ și șirul $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dat de $x_0 = 2, x_{n+1} = f(x_n), \forall n \in \mathbb{N}$.

5p **a)** Să se determine asimptotele graficului funcției *f*.

5p **b)** Să se arate că șirul $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ are limita 1.

5p **c)** Să se arate că șirul $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dat de $y_n = x_0 + x_1 + x_2 + ... + x_n - n$, este convergent.

2. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = 1 + \cos x$.

5p **a)** Să se calculeze $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{f(x)} dx$.

5p **b)** Să se calculeze $\int_0^{\sqrt{\pi}} x f(x^2)\, dx$.

5p **c)** Să se determine monotonia funcției $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, F(x) = x \int_0^x f(t) dt$.

Varianta 19

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Să se ordoneze crescător numerele $\sqrt{3}, \sqrt[3]{5}, \sqrt[4]{8}$.

5p **2.** Să se determine funcţia f, ştiind că reprezentările grafice ale funcţiilor f şi g, $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=-3x+2$ sunt simetrice faţă de dreapta $x=1$.

5p **3.** Să se rezolve ecuaţia $3^{2x+1}-10\cdot 3^{x+1}+27=0$.

5p **4.** Să se determine probabilitatea ca, alegând trei cifre din mulţimea $\{0,1,2,...,9\}$, cel puţin una din cifre să fie pară.

5p **5.** Să se determine ecuaţia medianei duse din A în triunghiul ABC, unde $A(1,2)$, $B(2,3)$ şi $C(2,-5)$.

5p **6.** Ştiind că $x\in\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$, să se arate că $\operatorname{ctg}2x=\frac{\operatorname{ctg}x-\operatorname{tg}x}{2}$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră matricele $A,B\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ şi funcţia $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$, $f(x)=\det(xA+B)$.

5p **a)** Dacă $A=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$, să se calculeze $f(i)f(-i)$.

5p **b)** Să se demonstreze că există $a\in\mathbb{R}$ astfel încât $\forall x\in\mathbb{C}$, $f(x)=\det(A)x^2+ax+\det(B)$.

5p **c)** Să se demonstreze că, dacă $AB=BA$ şi $\det\left(A^2+B^2\right)=0$, atunci $\det(A)=\det(B)$.

2. Pentru fiecare $n\in\mathbb{N}$, se consideră polinoamele $f_n, g_n\in\mathbb{R}[X]$,

$$f_n=1-\frac{1}{1!}X+\frac{1}{2!}X(X-1)-...+(-1)^n\frac{1}{n!}X(X-1)...(X-n+1) \text{ şi } g_n=n!f_n+1.$$

5p **a)** Să se calculeze $f_2(2)$.

5p **b)** Să se demonstreze că $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $f_n=\frac{(-1)^n}{n!}(X-1)(X-2)...(X-n)$.

5p **c)** Să se demonstreze că $\forall n\in\mathbb{N}$, $n\geq 2$, polinomul g_n nu are rădăcini întregi.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcţia $f:(-2,2)\to\mathbb{R}, f(x)=\ln\frac{2+x}{2-x}$.

5p **a)** Să se determine asimptotele graficului funcţiei f.

5p **b)** Să se determine punctele de inflexiune ale graficului funcţiei f.

5p **c)** Să se calculeze $\lim\limits_{x\to\infty}x^a f\left(\frac{1}{x}\right)$, $a\in\mathbb{R}$.

2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{-x^3+2x^2-5x+8}{x^2+4}, \forall x\in\mathbb{R}$.

5p **a)** Să se calculeze $\int_0^1 f(x)\,dx$.

5p **b)** Să se calculeze $\int_1^4 (x+f(x)-2)^2\,dx$.

5p **c)** Admiţând că funcţia f este bijectivă, să se calculeze $\int_{\frac{4}{5}}^{2} f^{-1}(x)\,dx$.

Varianta 20

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Să se arate că dacă şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ verifică $x_1 + 2x_2 + 3x_3 + ... + nx_n = (n+1)! - 1$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, atunci toţi termenii săi sunt numere naturale.

5p **2.** Să se rezolve în mulţimea numerelor complexe ecuaţia $(x^2 - 2x)^2 + x^2 - 2x = 2$.

5p **3.** Să se rezolve în $[0, 2\pi)$ ecuaţia $\sin x + \cos x = -1$.

5p **4.** Să se demonstreze că numărul $\dfrac{90!}{(30!)^3}$ este întreg.

5p **5.** Pe laturile AB şi AC ale triunghiului ABC se consideră punctele M şi respectiv N astfel încât $\overrightarrow{AM} = 4\overrightarrow{MB}$ şi $MN \parallel BC$. Să se determine $m \in \mathbb{R}$ astfel încât $\overrightarrow{CN} = m\overrightarrow{AC}$.

5p **6.** Să se calculeze perimetrul triunghiului OAB, ştiind că $O(0,0)$, $A(-1,2)$ şi $B(-2,3)$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră triunghiul ABC, cu laturile $AB = c$, $BC = a$, $CA = b$ şi sistemul $\begin{cases} ay + bx = c \\ cx + az = b \\ bz + cy = a \end{cases}$.

5p **a)** Să se rezolve sistemul în cazul $a = 3, b = 4, c = 5$.

5p **b)** Să se demonstreze că, pentru orice triunghi, sistemul are soluţie unică.

5p **c)** Dacă soluţia sistemului este (x_0, y_0, z_0), să se demonstreze că $x_0, y_0, z_0 \in (-1, 1)$.

2. Se consideră matricea $I_2 = \begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{1} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z}_3)$ şi mulţimea $G = \left\{ X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z}_3) \,\middle|\, XX^t = I_2 \right\}$,

unde X^t reprezintă transpusa matricei X.

5p **a)** Să se verifice dacă matricea $A = \begin{pmatrix} \hat{2} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{1} \end{pmatrix}$ aparţine mulţimii G.

5p **b)** Să se arate că $(G, \cdot)$ este un subgrup al grupului multiplicativ al matricelor nesingulare din $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z}_3)$.

5p **c)** Să se arate că suma elementelor mulţimii G este matricea nulă.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcţia $f : [0, \infty) \to [7, \infty)$, $f(x) = 2e^x + 3x^2 - 2x + 5$.

5p **a)** Să se demonstreze că funcţia f este strict crescătoare pe $[0, \infty)$.

5p **b)** Să se arate că funcţia f este bijectivă.

5p **c)** Să se calculeze derivata funcţiei f^{-1} în punctul $2e + 6$.

2. Se consideră funcţia $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(t) = \dfrac{1}{(1+t^2)(1+t^3)}$.

5p **a)** Să se calculeze $\int_0^1 (t^3 + 1) f(t)\, dt$.

5p **b)** Să se arate că $\int_{\frac{1}{x}}^{1} f(t)\, dt = \int_1^x t^3 f(t)\, dt,\ \forall x > 0$.

5p **c)** Să se calculeze $\lim\limits_{x\to\infty} \int_{\frac{1}{x}}^{x} f(t)\, dt$.

Varianta 21

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Să se rezolve în mulţimea numerelor complexe ecuaţia $x^2-8x+25=0$.

5p **2.** Să se determine valorile lui $a\in\mathbb{R}$, pentru care axa Ox intersectează graficul funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=(a+1)x^2+3(a-1)x+a-1$, în două puncte distincte.

5p **3.** Să se rezolve ecuaţia $\sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}}+\sqrt{4x-3-4\sqrt{x-1}}=3$.

5p **4.** Care eveniment are probabilitatea mai mare: să se obţină suma 7 aruncând simultan două zaruri, sau să se obţină suma 10 aruncând simultan trei zaruri?

5p **5.** Să se determine ecuaţia perpendicularei duse din punctual $A(1,2)$ pe dreapta $d:x+y-1=0$.

5p **6.** Ştiind că în triunghiul ABC există relaţia $a^2+b^2=2c^2$, să se arate că are loc egalitatea $\cos^2 A+\cos^2 B=2\cos^2 C$. ($a=BC, b=AC, c=AB$)

SUBIECTUL II (30p)

1. Pentru $a,b,c\in\mathbb{R}$, se consideră sistemul $\begin{cases} ax+by+cz=b\\ cx+ay+bz=a\\ bx+cy+az=c\end{cases}$.

5p **a)** Să se arate că determinantul sistemului este $\Delta=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc)$.

5p **b)** Să se rezolve sistemul în cazul în care este compatibil determinat.

5p **c)** Dacă $a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc=0$, să se arate că sistemul are o infinitate de soluţii (x,y,z), astfel încât $x^2+y^2=z-1$.

2. Se consideră grupul aditiv al numerelor întregi, $(\mathbb{Z},+)$ şi $H\subset\mathbb{Z}$, $H\neq\{0\}$, un subgrup al său. Pentru $n\in\mathbb{N}$ notăm $n\mathbb{Z}=\{nt\mid t\in\mathbb{Z}\}$.

5p **a)** Să se arate că intersecţia mulţimilor $4\mathbb{Z}$ şi $6\mathbb{Z}$ este un subgrup al grupului $(\mathbb{Z},+)$.

5p **b)** Să se arate că H conţine o infinitate de numere naturale.

5p **c)** Să se arate că $H=n\mathbb{Z}$, unde n este cel mai mic număr natural nenul care aparţine mulţimii H.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=(x-1)(x-3)(x-5)(x-7)$.

5p **a)** Să se arate că ecuaţia $f'(x)=0$ are exact trei rădăcini reale.

5p **b)** Să se determine valoarea minimă a funcţiei f.

5p **c)** Să se determine numărul de rădăcini reale ale ecuaţiei $f'(x)=af(x)$, unde $a\in\mathbb{R}$.

2. Se consideră o funcţie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, cu proprietatea că $xf(x)=\sin x, \forall x\in\mathbb{R}$.

5p **a)** Să se calculeze $\int_0^{\pi}x^2 f(x)\,dx$.

5p **b)** Să se arate că funcţia f este integrabilă pe orice interval $[a,b]$ cu $a,b\in\mathbb{R}, a<b$.

5p **c)** Să se arate că $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,dx<1+\cos 1$.

Varianta 22

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Se consideră $0,a_1a_2a_3...$ scrierea zecimală a numărului $\frac{3}{7}$. Să se calculeze $a_1 + a_2 + ... + a_{2008}$.

5p **2.** Se consideră funcţiile $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 3x + 2$, $g(x) = 2x - 1$. Să se rezolve ecuaţia $(f \circ g)(x) = 0$.

5p **3.** Să se rezolve ecuaţia $\lg(8x+9) + \lg x = 1 + \lg\left(x^2 - 1\right)$.

5p **4.** Să se rezolve inecuaţia $C_{4n+5}^{n^2} > 10$.

5p **5.** Se consideră dreptele de ecuaţii $d_1 : x - 2y = 0$ şi $d_2 : 2x - 4y - 1 = 0$. Să se calculeze distanţa dintre cele două drepte.

5p **6.** Să se calculeze $\sin 75^\circ + \sin 15^\circ$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră matricele $A, B, X \in M_3(\mathbb{R})$ astfel încât $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = I_3 + A$ şi $AX = XA$.

5p **a)** Să se verifice că $B^2 - 2B + I_3 \neq O_3$.

5p **b)** Să se demonstreze că există $a \in \mathbb{R}$ astfel încât $X^2 - 2aX + a^2 I_3 = O_3$.

5p **c)** Să se demonstreze că nu există o matrice $C \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ astfel încât $C^2 - 2C + 2I_3 = O_3$.

2. Se consideră şirul de numere reale $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, cu $a_0 = 0$ şi $a_{n+1} = a_n^2 + 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$ şi polinomul $f \in \mathbb{R}[X]$, cu $f(0) = 0$ şi cu proprietatea că $f(x^2+1) = (f(x))^2 + 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

5p **a)** Să se calculeze $f(5)$.

5p **b)** Să se arate că $\forall n \in \mathbb{N}$, $f(a_n) = a_n$.

5p **c)** Să se arate că $f = X$

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x}{x^4 + 3}$.

5p **a)** Să se calculeze $f'(x), x \in \mathbb{R}$.

5p **b)** Să se determine mulţimea valorilor funcţiei *f*.

5p **c)** Să se arate că $\left|f(x) - f(y)\right| \le |x - y|, \forall x, y \in \mathbb{R}$.

2. Se consideră funcţiile $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^3 - 3x + 2$ şi $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, g(x) = \int_0^x f(t) e^{t^2} dt$.

5p **a)** Să se calculeze $\int_0^1 (f(x) - 2) e^{x^2} dx$.

5p **b)** Să se calculeze $\int_{-1}^0 \frac{x^2 + 4}{f(x)} dx$.

5p **c)** Să se determine punctele de extrem ale funcţiei *g*.

Varianta 23

KRt

SUBIECTUL I (30p)

5p 1. Să se calculeze $\frac{1}{1+i}+\frac{1}{1-i}$.

5p 2. Să se rezolve ecuația $\frac{2x+3}{x+2}=\frac{x-1}{x-2}$.

5p 3. Să se calculeze $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}\frac{1}{2}\right)$.

5p 4. Să se determine probabilitatea ca, alegând un număr din primele 100 de numere naturale, acesta să nu conțină cifra 7.

5p 5. Să se calculeze lungimea razei cercului circumscris triunghiului ABC ştiind că $A(5,-3), B(2,-1)$, $C(0,9)$.

5p 6. Să se calculeze aria triunghiului ABC ştiind că $A(3,3)$ şi că ecuațiile înălțimilor duse din B şi C sunt $x-y+1=0$, respectiv $x+2y-3=0$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix}0 & 5\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ şi mulțimea $C(A)=\left\{X=\begin{pmatrix}a & 5b\\ b & a\end{pmatrix}\middle| a,b\in\mathbb{C}\right\}$.

5p a) Să se arate că $\forall X\in C(A)$, $XA=AX$.

5p b) Să se arate că dacă $Y\in C(A)$ şi $Y^2=O_2$, atunci $Y=O_2$.

5p c) Să se arate că dacă $Z\in C(A)$ şi $Z^{2008}=O_2$, atunci $Z=O_2$.

2. Se consideră mulțimile $\mathbb{Z}[i]=\{a+bi \mid a,b\in\mathbb{Z}\}$ şi $M=\left\{x^2+y^2 \middle| x,y\in\mathbb{Z}[i]\right\}$.

5p a) Să se demonstreze că $i\notin M$.

5p b) Să se demonstreze că M este parte stabilă în raport cu înmulțirea numerelor complexe.

5p c) Să se arate că mulțimea $\mathbb{Z}[i]\setminus M$ are o infinitate de elemente.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^3+x+1$.

5p a) Să se arate că, pentru orice $n\in\mathbb{N}$, ecuația $f(x)=3+\frac{1}{n+1}$ are o unică soluție $x_n\in\mathbb{R}$.

5p b) Să se arate că $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=1$, unde x_n este precizat la a).

5p c) Să se determine $\lim\limits_{n\to\infty}n(x_n-1)$, unde x_n este precizat la a).

2. Se consideră funcția $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\int_0^x\frac{\sin t}{1+t}dt$.

5p a) Să se arate că $f(x)<\ln(1+x), \forall x>0$.

5p b) Să se determine intervalele de monotonie ale funcției f.

5p c) Să se arate că $f(x)\geq 0, \forall x\in[0,2\pi]$.

Varianta 24

KRt

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Să se calculeze $\left(z^1+z^{-1}\right)\cdot\left(z^2+z^{-2}\right)\cdot\ldots\cdot\left(z^{2008}+z^{-2008}\right)$ pentru $z=\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$.

5p **2.** Să se determine funcția de gradul al doilea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, ştiind că $f(-1)=4, f(1)=2, f(2)=7$.

5p **3.** Să se rezolve ecuația $\log_2 x+\log_4 x+\log_8 x=\frac{11}{6}$.

5p **4.** Să se demonstreze că dacă $x\in\mathbb{R}$ şi $|x|\geq 1$, atunci $(1+x)^5+(1-x)^5\geq 32$.

5p **5.** Să se determine ecuația înălțimii duse din B în triunghiul ABC, ştiind că $A(0,9)$, $B(2,-1)$ şi $C(5,-3)$.

5p **6.** Să se calculeze $\left(2\vec{i}+5\vec{j}\right)\cdot\left(3\vec{i}-4\vec{j}\right)-\left(5\vec{i}-3\vec{j}\right)\cdot\left(2\vec{i}+4\vec{j}\right)$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră o matrice $A\in\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$. Se notează cu A^t transpusa matricei A.

5p **a)** Să se demonstreze că $\forall z\in\mathbb{C}$, $\forall X\in\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$, $\det(zX)=z^3\det(X)$.

5p **b)** Să se demonstreze că $\det(A-A^t)=0$.

5p **c)** Ştiind că $A\neq A^t$, să se demonstreze că $\operatorname{rang}(A-A^t)=2$.

2. Se consideră polinomul $f\in\mathbb{Q}[X]$, cu $f=X^4-5X^2+4$.

5p **a)** Să se determine rădăcinile polinomului f.

5p **b)** Să se determine polinomul $h\in\mathbb{Q}[X]$, pentru care $h(0)=1$ şi care are ca rădăcini inversele rădăcinilor polinomlui f.

5p **c)** Dacă g este un polinom cu coeficienți întregi, astfel încât $g(-2)=g(-1)=g(1)=g(2)=2$, să se arate că ecuația $g(x)=0$ nu are soluții întregi.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră mulțimea de funcții $A=\left\{f:[-1,1]\to\mathbb{R}\mid f \text{ este continuă şi } |f(x)-\arcsin x|\leq x^2, \forall x\in[-1,1]\right\}$.

5p **a)** Să se arate că $g\in A$, unde $g:[-1,1]\to\mathbb{R}, g(x)=x^3+\arcsin x$.

5p **b)** Să se arate că mulțimea A este infinită.

5p **c)** Să se arate că dacă $f\in A$, atunci funcția f este derivabilă în $x=0$.

2. Se consideră funcția $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases}\frac{e^{-x}-e^{-2x}}{x}, & x>0\\ 1, & x=0\end{cases}$.

5p **a)** Să se arate că funcția f are primitive pe $[0,\infty)$.

5p **b)** Să se calculeze $\int_0^1 xf(x)\,dx$.

5p **c)** Folosind eventual inegalitatea $e^x\geq x+1, \forall x\in\mathbb{R}$, să se arate că $0\leq\int_0^x f(t)\,dt<1, \forall x>0$.

Varianta 25

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Să se calculeze $(1-i)(1+2i)-3(2-i)$.

5p **2.** Să se determine valorile lui $a \in \mathbb{R}$, pentru care parabola $y=(a+1)x^2+ax+3$ şi dreapta $y=x+1$ au două puncte distincte comune.

5p **3.** Să se rezolve în mulţimea numerelor reale ecuaţia $2^{2x}-3\cdot 2^{x+1}+8=0$.

5p **4.** Să se determine probabilitatea ca, alegând un număr din mulţimea $\{1,2,3,...,100\}$, acesta să nu conţină cifra 3 .

5p **5.** Se consideră un triunghi ABC şi punctele M, N, P astfel încât $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{MB}$, $\overrightarrow{BN}=\overrightarrow{NC}$, $\overrightarrow{CP}=\overrightarrow{PA}$. Fie H ortocentrul triunghiului MNP. Să se demonstreze că $AH=BH=CH$.

5p **6.** Să se calculeze perimetrul triunghiului ABC ştiind că $A(2,3)$ şi că ecuaţiile înălţimilor duse din B şi C sunt $2x+y-3=0$, respectiv $x-y+2=0$.

SUBIECTUL II (30p)

1. În mulţimea S_3 a permutărilor de 3 elemente, se consideră permutarea $\sigma=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 3 & 1 & 2\end{pmatrix}$.

5p **a)** Să se verifice că permutarea σ este pară.

5p **b)** Să se determine toate permutările $x\in S_3$, astfel încât $x\sigma=\sigma x$.

5p **c)** Pentru $k\in\mathbb{N}$ fixat, să se determine toate permutările $y\in S_3$, astfel încât $y^k=\sigma$.

2. Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix}2 & 2\\ -1 & -1\end{pmatrix}$ şi mulţimea $G=\left\{X(a)=I_2+aA \mid a\in\mathbb{R}\setminus\{-1\}\right\}$.

5p **a)** Să se arate că $\forall\, a,b\in\mathbb{R}\setminus\{-1\}$, $X(a)X(b)=X(ab+a+b)$.

5p **b)** Să se arate că $(G,\cdot)$ este un grup abelian, unde „$\cdot$" reprezintă înmulţirea matricelor.

5p **c)** Să se determine $t\in\mathbb{R}$ astfel încât $X(1)X(2)...X(2007)=X(t-1)$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcţia $f:[3,\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{1}{2}\ln^2 x, \forall x\geq 3$ şi şirul $(a_n)_{n\geq 3}$, $a_n=\frac{\ln 3}{3}+\frac{\ln 4}{4}+...+\frac{\ln n}{n}$.

5p **a)** Să se arate că $0\leq f'(x)\leq 1,\ \forall x\geq 3$.

5p **b)** Să se arate că $f'(k+1)<f(k+1)-f(k)<f'(k), \forall k\geq 3$.

5p **c)** Să se arate că şirul $b_n=a_n-f(n)$ este convergent.

2. Se consideră funcţia $f:[0,\pi]\to\mathbb{R}, f(x)=\cos x$.

5p **a)** Să se calculeze aria mulţimii cuprinse între graficul funcţiei f, axele de coordonate şi dreapta $x=\pi$.

5p **b)** Să se calculeze volumul corpului obţinut prin rotirea graficului funcţiei f în jurul axei Ox.

5p **c)** Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-f\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right)\left(f\left(\frac{1}{n}\right)+f\left(\frac{2}{n}\right)+f\left(\frac{3}{n}\right)+...+f\left(\frac{n}{n}\right)\right)$.

Varianta 26

KRtm

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Să se determine partea întreagă a numărului $N=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{2007\cdot 2008}$.

5p **2.** Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=1-2x$. Să se calculeze suma
$f\left(f(1)\right)+f\left(f(2)\right)+f\left(f(3)\right)+\ldots+f\left(f(10)\right)$.

5p **3.** Să se rezolve ecuaţia $3^x+9^x=2$.

5p **4.** Fie mulţimea $A=\{-2,-1,0,1,2\}$. Să se determine numărul funcţiilor pare $f:A\to A$.

5p **5.** În sistemul cartezian de coordonate xOy se consideră punctele $A(-1,3)$ şi $B(1,-1)$. Să se determine ecuaţia mediatoarei segmentului AB.

5p **6.** Fie $\alpha\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$ cu $\sin\alpha=\frac{1}{3}$. Să se calculeze $\operatorname{tg}\alpha$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ şi $B=\begin{pmatrix}\cos t & -\sin t\\ \sin t & \cos t\end{pmatrix}$, cu $t\in\mathbb{R}$.

5p **a)** Să se arate că dacă matricea $X\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ verifică relaţia $AX=XA$, atunci există $a,b\in\mathbb{R}$, astfel încât $X=\begin{pmatrix}a & -b\\ b & a\end{pmatrix}$.

5p **b)** Să se demonstreze că $\forall\, n\in\mathbb{N}^*$, $B^n=\begin{pmatrix}\cos nt & -\sin nt\\ \sin nt & \cos nt\end{pmatrix}$.

5p **c)** Să se determine numărul matricelor $X\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ care verifică ecuaţia $X^2=A$.

2. Se consideră $a\in\mathbb{R}$ şi polinomul $f=3X^4-2X^3+X^2+aX-1\in\mathbb{R}[X]$.

5p **a)** Să se calculeze $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}+\frac{1}{x_4}$, unde $x_1,x_2,x_3,x_4\in\mathbb{C}$ sunt rădăcinile polinomului f.

5p **b)** Să se determine restul împărţirii polinomlui f la $(X-1)^2$.

5p **c)** Să se demonstreze că f are exact două rădăcini reale.

SUBIECTUL III (30p)

1. Fie funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\operatorname{arctg}x-\operatorname{arcctg}x$.

5p **a)** Să se arate că graficul funcţiei f admite asimptotă spre $+\infty$.

5p **b)** Să se arate că funcţia f este strict crescătoare pe $\mathbb{R}$.

5p **c)** Să se arate că şirul $(x_n)_{n\geq 1}$, dat de $x_{n+1}=f(x_n)$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$ şi $x_1=0$, este convergent.

2. Fie funcţia $f:[-1,1]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\arcsin x$.

5p **a)** Să se calculeze $\int_0^{\frac{1}{2}} f(x)\,dx$.

5p **b)** Să se determine $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx$.

5p **c)** Să se arate că $\int_0^1 f(x)\,dx<\frac{\pi}{4}$.

Varianta 27

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Să se calculeze modulul numărului complex $1+i+i^2+i^3+\ldots+i^{2008}$.

5p **2.** Să se determine valoarea maximă a funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=-2x^2+x$.

5p **3.** Să se rezolve în intervalul $(0;\infty)$ ecuaţia $\lg^2 x+5\lg x-6=0$.

5p **4.** Să se determine numărul funcţiilor $f:\{0,1,2,3\}\to\{0,1,2,3\}$ care au proprietatea $f(0)+f(1)=2$.

5p **5.** În sistemul cartezian de coordonate xOy se consideră punctele $O(0,0)$, $A(1,2)$ şi $B(3,1)$. Să se determine măsura în radiani a unghiului AOB.

5p **6.** Ştiind că $\alpha\in\mathbb{R}$ şi că $\sin\alpha+\cos\alpha=\frac{1}{3}$, să se calculeze $\sin 2\alpha$.

SUBIECTUL II (30p)

1. În mulţimea $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}$ şi $I_2=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$.

5p **a)** Să se determine în funcţie de $a\in\mathbb{C}$, rangul matricei $A+aI_2$.

5p **b)** Să se demonstreze că dacă $X\in\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ astfel încât $AX=XA$, atunci există $x,y\in\mathbb{C}$ astfel încât $X=\begin{pmatrix}x&0\\y&x\end{pmatrix}$.

5p **c)** Să se demonstreze că ecuaţia $Y^3=A$ nu are nicio soluţie în mulţimea $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.

2. Pe mulţimea $\mathbb{R}$ se defineşte legea de compoziţie $x*y=x+y+xy$.

5p **a)** Să se arate că legea „$*$” este asociativă.

5p **b)** Să se calculeze $1*\frac{1}{2}*\frac{1}{3}*\ldots*\frac{1}{2008}$.

5p **c)** Să se determine toate numerele reale a, pentru care mulţimea $M=[a,\infty)$ este o parte stabilă a lui $\mathbb{R}$ în raport cu legea de compoziţie „$*$”.

SUBIECTUL III (30p)

1. Fie funcţia $f:[-1,1]\to\mathbb{R}$, $f(x)=(x-1)\arcsin x$.

5p **a)** Să se calculeze $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^2-x}$.

5p **b)** Să se determine punctele în care funcţia f nu este derivabilă.

5p **c)** Să se demonstreze că graficul funcţiei f are un singur punct de inflexiune.

2. Fie funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\operatorname{arctg} x$.

5p **a)** Să se calculeze $\int_0^1 f(x)\,dx$.

5p **b)** Să se arate că $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}\int_1^x f(\ln t)\,dt=\frac{\pi}{2}$.

5p **c)** Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(f\left(\frac{1}{2n}\right)+f\left(\frac{3}{2n}\right)+f\left(\frac{5}{2n}\right)+\ldots+f\left(\frac{2n-1}{2n}\right)\right)$.

Varianta 28

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Să se determine partea imaginară a numărului $(1+i)^{10}+(1-i)^{10}$.

5p **2.** Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=6x-3x^2$. Să se ordoneze crescător $f\left(\sqrt{2}\right)$, $f\left(\sqrt{3}\right)$ şi $f\left(\sqrt{\pi}\right)$.

5p **3.** Să se rezolve ecuația $\sqrt{x+3}+\sqrt{2x-1}=3$.

5p **4.** Să se determine numărul funcțiilor $f:\{0,1,2,3\}\to\{0,1,2,3\}$ care au proprietatea că $f(0)f(1)=0$.

5p **5.** Fie triunghiul ABC şi $M\in(BC)$ astfel încât $\frac{BM}{MC}=\frac{1}{2}$. Să se demonstreze că $\overrightarrow{AM}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$.

5p **6.** Ştiind că $\alpha\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$ şi că $\sin\alpha=\frac{3}{5}$, să se calculeze $\operatorname{tg}\alpha$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră mulțimea $M=\left\{\begin{pmatrix} a & 0 & 0\\ 0 & b & 0\\ 0 & 0 & c\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_3(\mathbb{R})\ \middle|\ a,b,c\in\mathbb{R}\right\}$ şi matricea $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix}\in M$.

5p **a)** Să se rezolve ecuația $\det(A-xI_3)=0$.

5p **b)** Să se demonstreze că dacă matricea $X\in\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ verifică $AX=XA$, atunci $X\in M$.

5p **c)** Să se determine numărul soluțiilor ecuației $Y^2=A$ în mulțimea $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

2. Se consideră mulțimea de funcții $G=\left\{f_{a,b}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\ \middle|\ f_{a,b}(x)=ax+b,\ a\in\mathbb{R}^*,\ b\in\mathbb{R}\right\}$.

5p **a)** Să se calculeze $f_{-1,2}\circ f_{-1,2}$.

5p **b)** Să se demonstreze că $(G,\circ)$ este un grup, unde „$\circ$” este compunerea funcțiilor.

5p **c)** Să se demonstreze că G nu are subgrupuri cu 4 elemente.

SUBIECTUL III (30p)

1. Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\{x\}(1-\{x\})$, unde $\{x\}$ este partea fracționară a numărului x.

5p **a)** Să se calculeze $\lim\limits_{x\to1}f(x)$.

5p **b)** Să se determine domeniul de continuitate al funcției f.

5p **c)** Să se determine toate punctele în care funcția f nu este derivabilă .

2. Se consideră funcțiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{1}{2-\sin x}$ şi $F:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $F(x)=\int_0^x f(t)dt$.

5p **a)** Să se calculeze $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx$.

5p **b)** Să se demonstreze că funcția F este strict crescătoare.

5p **c)** Să se determine $\lim\limits_{x\to\infty}F(x)$.

Varianta 29

KRt

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Să se demonstreze că numărul $\sqrt{7-4\sqrt{3}}+\sqrt{4-2\sqrt{3}}$ este număr natural.

5p **2.** Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x^2-5x+2$. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ inecuaţia $f(x)\le 0$.

5p **3.** Să se rezolve ecuaţia $x=\sqrt{2-x}$.

5p **4.** Se consideră mulţimea $A=\{1,2,3,4,5,6\}$. Alegem la întâmplare o submulţime dintre submulţimile nevide ale lui A. Să se calculeze probabilitatea ca submulţimea aleasă să aibă toate elementele impare.

5p **5.** Să se demonstreze că mijloacele bazelor unui trapez şi punctul de intersecţie al laturilor neparalele ale trapezului sunt puncte coliniare.

5p **6.** Ştiind că $\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ şi că $\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha=2$, să se calculeze $\sin 2\alpha$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră $m\in\mathbb{R}$, sistemul de ecuaţii liniare $\begin{cases}x+y+z=0\\ mx+y+z=m-1\\ x+my+2z=-1\end{cases}$ şi matricea $A=\begin{pmatrix}1&1&1\\ m&1&1\\ 1&m&2\end{pmatrix}$.

5p **a)** Să se determine $m\in\mathbb{R}$ pentru care $\det A=0$.

5p **b)** Să se arate că sistemul are soluţie pentru orice $m\in\mathbb{R}$.

5p **c)** Să se determine $m\in\mathbb{R}$ pentru care sistemul are o soluţie de forma $(a,b,-1)$.

2. Se consideră mulţimea $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z}_3)$, submulţimea $G=\left\{X\in\mathcal{M}_2(\mathbb{Z}_3)\,\middle|\,X=\begin{pmatrix}a&\hat{2}b\\ b&a\end{pmatrix}\right\}$ şi matricele $O_2=\begin{pmatrix}\hat{0}&\hat{0}\\ \hat{0}&\hat{0}\end{pmatrix}$ şi $I_2=\begin{pmatrix}\hat{1}&\hat{0}\\ \hat{0}&\hat{1}\end{pmatrix}$.

5p **a)** Să se verifice că dacă $x,y\in\mathbb{Z}_3$, atunci $x^2+y^2=\hat{0}$ dacă şi numai dacă $x=y=\hat{0}$.

5p **b)** Să se arate că mulţimea $H=G\setminus\{O_2\}$ este un subgrup al grupului multiplicativ al matricelor inversabile din $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z}_3)$.

5p **c)** Să se calculeze produsul tuturor elementelor grupului $H=G\setminus\{O_2\}$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră $n\in\mathbb{N}^*$ şi funcţiile $f_n,g_n:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f_n(x)=1-x+x^2-x^3+\ldots-x^{2n-1}+x^{2n}$, $g_n(x)=x^{2n+1}+1$.

5p **a)** Să se verifice că $f_n'(x)=\frac{g_n'(x)}{x+1}-\frac{g_n(x)}{(x+1)^2}$, $\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{-1\}$.

5p **b)** Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2n}{2^{n-1}}-\frac{2n-1}{2^{n-2}}+\frac{2n-2}{2^{n-3}}-\frac{2n-3}{2^{n-4}}+\ldots+\frac{2}{2^1}-1\right)$.

5p **c)** Să se demonstreze că f_n are exact un punct de extrem local.

2. Fie şirul $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ dat de $I_n=\int_0^2(2x-x^2)^n dx$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$.

5p **a)** Să se calculeze I_2.

5p **b)** Să se demonstreze că $(2n+1)I_n=2nI_{n-1}$, $\forall n\in\mathbb{N}^*, n\ge 2$.

5p **c)** Să se determine $\lim\limits_{n\to\infty}I_n$.

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Să se demonstreze că numărul $\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{99}+\sqrt{100}}\in\mathbb{N}$.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-mx+2$. Să se determine mulțimea valorilor parametrului real m pentru care graficul funcției f intersectează axa Ox în două puncte distincte.

5p **3.** Să se rezolve ecuația $\log_3(x+1)+\log_3(x+3)=1$.

5p **4.** Se consideră mulțimea $A=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$. Alegem la întâmplare o submulțime a mulțimii A. Să se calculeze probabilitatea ca submulțimea aleasă să aibă trei elemente.

5p **5.** Să se demonstreze că mijloacele bazelor unui trapez şi punctul de intersecție al diagonalelor trapezului sunt puncte coliniare.

5p **6.** Să se demonstreze că $\sin\frac{\pi}{8}=\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră numerele reale a,b,c, funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^3+2x+3$ şi determinanții

$$A=\begin{vmatrix}1&1&1\\a&b&c\\a^3&b^3&c^3\end{vmatrix} \text{ şi } B=\begin{vmatrix}1&1&1\\a&b&c\\f(a)&f(b)&f(c)\end{vmatrix}.$$

5p **a)** Să se arate că $A=(a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c)$.

5p **b)** Să se arate că $A=B$.

5p **c)** Să se arate că, pentru orice trei puncte distincte, cu coordonate naturale, de pe graficul funcției f, aria triunghiului cu vârfurile în aceste puncte este un număr natural divizibil cu 3.

2. Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix}-1&3\\3&-9\end{pmatrix}$ şi mulțimea $G=\left\{X(a)=I_2+aA \mid a\in\mathbb{R}\right\}$.

5p **a)** Să se arate că $\forall\, a,b\in\mathbb{R}$, $X(a)X(0)=X(a)$ şi $X(a)X(b)=X(a+b-10ab)$.

5p **b)** Să se arate că mulțimea $H=\left\{X(a) \mid a\in\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{1}{10}\right\}\right\}$ este parte stabilă în raport cu înmulțirea matricelor şi $(H,\cdot)$ este grup.

5p **c)** Să se determine produsul $X\left(\frac{1}{100}\right)X\left(\frac{2}{100}\right)\ldots X\left(\frac{100}{100}\right)$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x-\frac{x^3}{6}-\sin x$.

5p **a)** Să se determine $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$.

5p **b)** Să se calculeze derivata a doua $f''(x)$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **c)** Să se demonstreze că $f(x)\le 0, \forall x\ge 0$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\cos x-1+\frac{1}{2}x^2$.

5p **a)** Să se calculeze $\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)dx$.

5p **b)** Să se determine $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x^2}\int_0^x f(t)dt$.

5p **c)** Să se demonstreze că $\int_0^1\cos\left(x^2\right)dx\ge\frac{9}{10}$.

Varianta 31

KRt

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Ştiind că $\log_3 2 = a$, să se demonstreze că $\log_{16} 24 = \frac{1+3a}{4a}$.

5p **2.** Să se determine două numere reale care au suma 1 şi produsul -1.

5p **3.** Să se rezolve ecuaţia $2^{2x+1} + 2^{x+2} = 160$.

5p **4.** Într-o clasă sunt 22 de elevi, din care 12 sunt fete. Să se determine în câte moduri se poate alege un comitet reprezentativ al clasei format din 3 fete şi 2 băieţi.

5p **5.** În sistemul cartezian de coordonate xOy se consideră punctele $A(2,-1)$, $B(-1,1)$ şi $C(1,3)$. Să se determine ecuaţia dreptei care trece prin punctul C şi este paralelă cu dreapta AB.

5p **6.** Să se demonstreze că $\sin 6 > \sin 4$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Pentru $x \in \mathbb{C}$ se consideră matricea $A(x) = \begin{pmatrix} x+1 & x^2-1 \\ 1 & x-1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.

5p **a)** Să se verifice că $(A(x))^2 = 2xA(x)$.

5p **b)** Să se determine toate numerele complexe x pentru care $(A(x))^4 + (A(x))^2 = O_2$.

5p **c)** Să se demonstreze că, dacă $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$, atunci ecuaţia $X^n = A(0), X \in M_2(\mathbb{C})$ nu are soluţii.

2. Se consideră polinomul $f \in \mathbb{C}[X]$, $f = (X+i)^{2008} + (X-i)^{2008}$, care are forma algebrică $f = a_{2008}X^{2008} + a_{2007}X^{2007} + \ldots + a_1X + a_0$.

5p **a)** Să se calculeze $a_{2008} + a_{2007}$.

5p **b)** Să se determine restul împărţirii polinomului f la $X^2 - 1$.

5p **c)** Să se demonstreze că polinomul f are toate rădăcinile reale.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \sqrt{|x^2 - x|}$.

5p **a)** Să se arate că graficul funcţiei f admite o asimptotă spre $-\infty$.

5p **b)** Să se determine domeniul de derivabilitate al funcţiei f.

5p **c)** Să se determine punctele de extrem local ale funcţiei f.

2. Se consideră şirul $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ dat de $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{x^2+1}dx, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

5p **a)** Să se calculeze I_2.

5p **b)** Să se verifice că $I_{n+2} + I_n = \frac{1}{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

5p **c)** Să se calculeze $\lim_{n\to\infty} nI_n$.

Varianta 32

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Se consideră numărul real $s=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\ldots+\frac{1}{2^{2008}}$. Să se demonstreze că $s\in(1;2)$.

5p **2.** Se consideră funcțiile $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x-1$ şi $g(x)=-4x+1$. Să se determine coordonatele punctului de intersecție a graficelor celor două funcții.

5p **3.** Să se rezolve ecuația $\sin x=1+\cos^2 x$.

5p **4.** Fie mulțimea $A=\{-2,-1,0,1,2\}$. Să se determine numărul funcțiilor impare $f:A\to A$.

5p **5.** În sistemul cartezian de coordonate xOy se consideră punctele $A(2,-1)$, $B(-1,1)$ şi $C(1,3)$. Să se determine coordonatele punctului D știind că patrulaterul $ABCD$ este paralelogram.

5p **6.** Ştiind că $x\in\left(\frac{\pi}{2};\pi\right)$ şi că $\sin x=\frac{3}{5}$, să se calculeze $\sin\frac{x}{2}$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră $a\in\mathbb{R}$, sistemul $\begin{cases}ax+y+z=1\\x+ay+z=1\\x+y+az=a\end{cases}$ şi ecuația (C): $x^2+y^2=z^2$.

5p **a)** Să se arate că determinantul sistemului are valoarea $(a+2)(a-1)^2$.

5p **b)** Să se arate că pentru niciun $a\in\mathbb{R}\setminus\{-2,1\}$, soluția sistemului nu verifică ecuația (C).

5p **c)** Să se determine a, pentru care exact două dintre soluțiile sistemului sunt soluții ale ecuației (C).

2. Se consideră mulțimea $G\subset\mathcal{M}_2(\mathbb{Q})$, $G=\left\{\begin{pmatrix}a & 10b\\ b & a\end{pmatrix} \mid a,b\in\mathbb{Q},\ a^2-10b^2=1\right\}$.

5p **a)** Să se verifice că $A=\begin{pmatrix}19 & 60\\ 6 & 19\end{pmatrix}\in G$.

5p **b)** Să se arate că $(G,\cdot)$ este un grup, unde „$\cdot$” este înmulțirea matricelor.

5p **c)** Să se demonstreze că mulțimea G este infinită.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\operatorname{arctg}(x+2)-\operatorname{arctg}x$.

5p **a)** Să se calculeze $f'(x)$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Să se demonstreze că $0<f(x)\le\frac{\pi}{2}$, $\forall x\in\mathbb{R}$.

5p **c)** Să se demonstreze că funcția $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=f(x)+\operatorname{arctg}\frac{(x+1)^2}{2}$ este constantă.

2. Se consideră funcțiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x^3}{3}-x+\operatorname{arctg}x$ şi $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=\operatorname{arctg}x$.

5p **a)** Să se calculeze $\int_1^2\frac{f'(x)}{x}dx$.

5p **b)** Să se determine $\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^3}\int_0^x f(t)dt$.

5p **c)** Să se calculeze aria suprafeței cuprinse între graficele celor două funcții şi dreptele $x=0$ şi $x=1$.

Varianta 33

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Fie $x_n = (\sqrt{n} + \sqrt{n+1})^2$, $n \in \mathbb{N}$. Să se arate că, pentru orice $n \in \mathbb{N}$, are loc egalitatea $[x_n] = 4n+1$, unde $[x_n]$ reprezintă partea întreagă a numărului real x_n.

5p **2.** Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = mx^2 + 2(m-1)x + m - 1$. Să se determine valorile lui $m \in \mathbb{R}$ astfel încât $f(x) > 0$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

5p **3.** Să se rezolve ecuația $16^x + 3 \cdot 4^x = 4$.

5p **4.** Să se calculeze probabilitatea ca, alegând un element din mulțimea $\{\sqrt{n} \mid n \in \mathbb{N},\ n < 100\}$, acesta să fie număr rațional.

5p **5.** În sistemul cartezian de coordonate xOy se consideră punctele $A(2,-1)$, $B(-1,1)$, $C(1,3)$ și $D(a,4)$, unde $a \in \mathbb{R}$. Să se determine valorile lui a astfel încât dreptele AB și CD să fie paralele.

5p **6.** Știind că $x \in \mathbb{R}$ și că $\operatorname{tg} x = \frac{1}{2}$, să se calculeze $\operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră matricele $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ și $A = aI_3 + bB + cB^2$, $a, b, c \in \mathbb{R}$.

5p **a)** Să se calculeze B^{2008}.

5p **b)** Să se demonstreze că $\forall\, a, b, c \in \mathbb{R}$, $(a+b+c)\det(A) \geq 0$.

5p **c)** Să se demonstreze că dacă ecuația $\det(A - xI_3) = 0$ are toate rădăcinile reale, atunci $b = c$.

2. Se consideră polinoamele $f_0, f_1, f_2, f_3 \in \mathbb{C}[X]$, definite prin $f_0 = 1$, $f_1 = X$, $f_2 = \frac{1}{2}X(X-1)$ și $f_3 = \frac{1}{6}X(X-1)(X-2)$.

5p **a)** Să se demonstreze că, pentru orice $k \in \mathbb{Z}$, avem $f_3(k) \in \mathbb{Z}$.

5p **b)** Să se arate că dacă $g \in \mathbb{C}[X]$ este un polinom de gradul 3, atunci există și sunt unice numerele $a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{C}$, astfel încât $g = a_0 f_0 + a_1 f_1 + a_2 f_2 + a_3 f_3$.

5p **c)** Să se arate că dacă $h \in \mathbb{C}[X]$ este un polinom de gradul 3 astfel încât pentru $n \in \{0, 1, 2, 3\}$, $h(n) \in \mathbb{Z}$, atunci $\forall\, n \in \mathbb{Z}$, $h(n) \in \mathbb{Z}$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Fie funcția $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ și șirul $(a_n)_{n\geq 1}$, $a_n = \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{3\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{n\sqrt{n}}, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

5p **a)** Să se arate că funcția f' este strict crescătoare pe intervalul $(0, +\infty)$.

5p **b)** Să se demonstreze că $\frac{1}{2(k+1)\sqrt{k+1}} < \frac{1}{\sqrt{k}} - \frac{1}{\sqrt{k+1}} < \frac{1}{2k\sqrt{k}}, \forall k \in \mathbb{N}^*$.

5p **c)** Să se demonstreze că șirul $(a_n)_{n\geq 1}$ este convergent.

2. Se consideră funcțiile $f_n : [0, +\infty) \to \mathbb{R}, f_n(x) = \int_0^x t^n \operatorname{arctg} t\, dt, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

5p **a)** Să se determine $f_1(x), x \in [0, +\infty)$.

5p **b)** Să arate că $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(1) = 0$.

5p **c)** Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} n f_n(1)$.

Varianta 34

KRtm

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Să se calculeze modulul numărului complex $z = (3+4i)^4$

5p **2.** Se consideră $m \in \mathbb{R}^*$ şi funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = mx^2 + 2(m-1)x + m - 1$. Să se demonstreze că vârful parabolei asociate funcţiei *f* se găseşte pe dreapta de ecuaţie $x + y = 0$.

5p **3.** Să se determine numărul soluţiilor ecuaţiei $\sin x = \sin 2x$ din intervalul $[0, 2\pi)$.

5p **4.** Fie mulţimea $A = \{1,2,3,4,5\}$. Să se determine numărul funcţiilor surjective $f : A \to A$.

5p **5.** În sistemul cartezian de coordonate xOy se consideră punctele $A(2,-1)$, $B(-1,1)$, $C(1,3)$ şi $D(a,4)$, $a \in \mathbb{R}$. Să se determine valorile lui a pentru care dreptele AB şi CD sunt perpendiculare.

5p **6.** Se consideră triunghiul ascuţitunghic ABC în care are loc relaţia $\sin B + \cos B = \sin C + \cos C$. Să se demonstreze că triunghiul ABC este isoscel.

SUBIECTUL II (30p)

1. Pentru matricea $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$, se consideră funcţia $f_A : \mathcal{M}_2(\mathbb{Z}) \to \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$, $f_A(X) = AX$.

5p **a)** Să se calculeze $\det\left(f_A(B)\right)$, ştiind că $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ şi $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

5p **b)** Să se arate că funcţia f_A este injectivă dacă şi numai dacă $\det(A) \neq 0$.

5p **c)** Să se demonstreze că dacă $A^2 = O_2$ atunci, pentru orice întreg a, $f_{I_2 + aA}$ este bijectivă.

2. Pe mulţimea $\mathbb{R}$ se consideră legea de compoziţie $x * y = axy - x - y + 6$, $\forall\, x, y \in \mathbb{R}$, unde a este o constantă reală.

5p **a)** Pentru $a = \dfrac{1}{3}$, să se demonstreze că legea „$*$” este asociativă.

5p **b)** Să se arate că legea „$*$” admite element neutru dacă şi numai dacă $a = \dfrac{1}{3}$.

5p **c)** Să se arate că dacă operaţia „$*$” este o lege de compoziţie pe intervalul $[0, 6]$, atunci $a \in \left[\dfrac{1}{6}, \dfrac{1}{3}\right]$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{x+1} - \ln\left(x + \dfrac{3}{2}\right) + \ln\left(x + \dfrac{1}{2}\right)$ şi şirul $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$,

$a_n = 1 + \dfrac{1}{2} + \ldots + \dfrac{1}{n} - \ln\left(n + \dfrac{1}{2}\right)$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

5p **a)** Să se demonstreze că funcţia f este strict crescătoare pe intervalul $(0,+\infty)$.

5p **b)** Să se arate că $f(x) < 0$, $\forall x \in (0,+\infty)$.

5p **c)** Să se demonstreze că şirul $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este strict descrescător.

2. Se consideră funcţiile $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = \int_0^x t^n \arcsin t \, dt$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

5p **a)** Să se calculeze $f_1\left(\dfrac{1}{2}\right)$.

5p **b)** Să se determine $\lim\limits_{\substack{x\to 1 \\ x<1}} f_2(x)$.

5p **c)** Să se arate că $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n}\, f_n(x) = 0, \forall x \in [0,1]$.

Varianta 35

KRtm

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Se consideră şirul $(a_n)_{n\geq 1}$. Ştiind că pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$ are loc egalitatea $a_1+a_2+...+a_n=n^2+n$, să se demonstreze că şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ este progresie aritmetică.

5p **2.** Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x+2$. Să se rezolve ecuaţia $f(f(x))=f^2(x)$.

5p **3.** Rezolvaţi în $\mathbb{R}$ ecuaţia $3\cdot 4^x-6^x=2\cdot 9^x$.

5p **4.** Se consideră mulţimea $A=\{0,1,2,...,1000\}$. Să se determine probabilitatea ca, alegând la întâmplare un element din mulţimea A, acesta să fie divizibil cu 2 sau cu 5.

5p **5.** În sistemul cartezian de coordonate xOy se consideră punctele $A(0,-3)$ şi $B(4,\ 0)$. Să se calculeze distanţa de la punctul O la dreapta AB.

5p **6.** Să se demonstreze că într-un paralelogram suma pătratelor lungimilor laturilor este egală cu suma pătratelor lungimilor diagonalelor.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ 2 & 2 & 0\\ 1 & 4 & -3\end{pmatrix}$ şi $B=\begin{pmatrix}2\\ 1\\ 5\end{pmatrix}$.

5p **a)** Să se arate că ecuaţia $AX=B$ are o infinitate de soluţii $X\in\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{C})$.

5p **b)** Să se verifice că $A^3=10A$.

5p **c)** Să se determine rangul matricei A^*, adjuncta matricei A.

2. Se consideră inelul $(\mathbb{Z}[\sqrt{2}],+,\cdot)$, unde $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]=\{a+b\sqrt{2}\mid a,b\in\mathbb{Z}\}$ şi funcţia $f:\mathbb{Z}[\sqrt{2}]\to\mathbb{Z}$, $f(a+b\sqrt{2})=a^2-2b^2$.

5p **a)** Să se arate că pentru orice $x,y\in\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$, $f(xy)=f(x)f(y)$.

5p **b)** Să se arate că mulţimea $A=\{x\in\mathbb{Z}[\sqrt{2}]\mid f(x)=-1\}$ este infinită.

5p **c)** Să se arate că mulţimea elementelor inversabile ale inelului $(\mathbb{Z}[\sqrt{2}],+,\cdot)$ este $J=\left\{x\in\mathbb{Z}\left[\sqrt{2}\right]\,\middle|\, f(x)\in\{-1,1\}\right\}$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x-\ln(e^x+1)$.

5p **a)** Să se arate că funcţia f' este strict descrescătoare pe $\mathbb{R}$.

5p **b)** Să se arate că $\lim\limits_{x\to\infty}x^a f(x)=0,\forall a\in\mathbb{R}$.

5p **c)** Să se determine asimptotele graficului funcţiei f.

2. Se consideră şirul $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ definit prin $I_n=\int_0^1\frac{x^n}{1+x^3}dx,\ \forall n\in\mathbb{N}^*$.

5p **a)** Să se calculeze I_2.

5p **b)** Să se demonstreze că şirul $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este strict descrescător.

5p **c)** Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}I_n$.

Varianta 36

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Se consideră numărul rațional $\frac{1}{7}$ scris sub formă de fracție zecimală infinită $\frac{1}{7}=0,a_1a_2a_3\ldots$. Să se calculeze suma $a_1+a_2+a_3+\ldots+a_{2008}$.

5p **2.** Fie funcțiile $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2-x$, $g(x)=3x+2$. Să se calculeze $(f\circ g)(x)-(g\circ f)(x)$.

5p **3.** Să se demonstreze că funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^3+x+1$ este injectivă.

5p **4.** Să se calculeze probabilitatea ca, alegând un număr natural de trei cifre, acesta să fie pătrat perfect.

5p **5.** Să se determine $a\in\mathbb{R}$ pentru care punctele $A(1,-2)$, $B(4,1)$ și $C(-1,a)$ să fie coliniare.

5p **6.** Fie ABC un triunghi care are $AB=3$, $AC=5$ și $BC=7$. Să se calculeze $\cos A$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră matricele $O_2=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$ și $A=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, cu proprietatea că $A^2=O_2$.

5p **a)** Să se arate că $a+d=0$.

5p **b)** Să se arate că matricele $A\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ care au proprietatea $A^2=O_2$, sunt de forma $A=\begin{pmatrix}0&0\\c&0\end{pmatrix}$, cu $c\in\mathbb{R}$ sau $A=b\begin{pmatrix}t&1\\-t^2&-t\end{pmatrix}$, cu $b,t\in\mathbb{R}$.

5p **c)** Să se demonstreze că dacă $A\neq O_2$, atunci ecuația $X^2=A$ nu are soluție în mulțimea $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

2. Se consideră polinomul $f=X^4-2X^2+9$, cu rădăcinile $x_1,x_2,x_3,x_4\in\mathbb{C}$, numărul $a=\sqrt{2}+i$ și mulțimile $A=\left\{g(a)\,\middle|\,g\in\mathbb{Q}[X]\right\}$ și $B=\left\{h(a)\,\middle|\,h\in\mathbb{Q}[X],\operatorname{grad}(h)\le 3\right\}$.

5p **a)** Să se calculeze $f(a)$.

5p **b)** Să se calculeze $|x_1|+|x_2|+|x_3|+|x_4|$.

5p **c)** Să se arate că $A=B$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Fie funcția $f:\mathbb{R}\setminus\{\sqrt{3}\}\to\mathbb{R}, f(x)=\dfrac{x\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-x}$ și șirul $(a_n)_{n\ge1}$ definit prin $a_1=2,\ a_{n+1}=f(a_n),\forall n\in\mathbb{N}^*$.

5p **a)** Să se demonstreze că funcția f este strict descrescătoare pe $(-\infty,\sqrt{3})$ și pe $(\sqrt{3},\infty)$.

5p **b)** Să se determine asimptotele graficului funcției f.

5p **c)** Să se demonstreze că șirul $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ nu este convergent.

2. Se consideră funcțiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=e^{-x^2}$ și $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ F(x)=\int_0^x f(t)dt$.

5p **a)** Să se determine punctele de inflexiune ale graficului funcției F.

5p **b)** Să se calculeze $\int_0^1 xf(x)dx$.

5p **c)** Să se calculeze $\int_0^1 F(x)dx$.

Varianta 37

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Să se calculeze suma $[\sqrt{1}]+[\sqrt{2}]+[\sqrt{3}]+...+[\sqrt{100}]$, unde $[x]$ este partea întreagă a numărului real x.

5p **2.** Să se determine imaginea funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x^2+x+1$.

5p **3.** Să se calculeze valoarea expresiei $E=\sin\left(\arccos\frac{1}{3}\right)+\cos\left(\arcsin\frac{1}{3}\right)$.

5p **4.** Să se determine numărul termenilor raționali din dezvoltarea binomului $\left(\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}\right)^{100}$.

5p **5.** Fie $ABCD$ un pătrat de latură 1. Să se calculeze lungimea vectorului $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}$.

5p **6.** Să se demonstreze că $\sin 75^\circ=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră mulțimea M a tuturor matricelor cu 3 linii şi cu 3 coloane, care au toate elementele din mulțimea $\{1, 2\}$.

5p **a)** Să se dea un exemplu de matrice de rang 2 din mulțimea M.

5p **b)** Să se arate că dacă matricea $A\in\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ are rangul 1, liniile sale sunt, două câte două, direct proporționale .

5p **c)** Să se determine numărul tuturor matricelor de rang 1 din mulțimea M.

2. Se consideră polinomul $f\in\mathbb{R}[X],\ f=X^3+pX^2+qX+r$, cu $p,q,r\in(0,\infty)$ şi cu rădăcinile $x_1,x_2,x_3\in\mathbb{C}$.

5p **a)** Să se demonstreze că f nu are rădăcini în intervalul $[0,\infty)$.

5p **b)** Să se calculeze $x_1^3+x_2^3+x_3^3$ în funcție de p, q şi r.

5p **c)** Să se demonstreze că dacă a,b,c sunt trei numere reale astfel încât $a+b+c<0$, $ab+bc+ca>0$ şi $abc<0$, atunci $a,b,c\in(-\infty,0)$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x^3-3x+3\operatorname{arctg}x$.

5p **a)** Să se arate că funcția f este strict crescătoare pe $\mathbb{R}$.

5p **b)** Să se arate că funcția f este bijectivă.

5p **c)** Să se calculeze derivata funcției inverse a funcției f în punctul $\frac{3\pi-8}{4}$.

2. Se consideră şirul $(I_n)_{n\geq1}$ dat de $I_n=\int_0^1 x^n e^x\,dx, \forall n\in\mathbb{N}^*$.

5p **a)** Să se calculeze I_1.

5p **b)** Să se demonstreze că şirul $(I_n)_{n\geq1}$ este convergent.

5p **c)** Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} nI_n$.

Varianta 38

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Să se arate că $\log_2 3 \notin \mathbb{Q}$.

5p **2.** Să se determine valorile reale ale lui m pentru care $mx^2 + 3x + m > 0$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$.

5p **3.** Să se rezolve ecuaţia $\sin x + \cos x = 1$.

5p **4.** Să se demonstreze egalitatea $C_n^1 + 2C_n^2 + 3C_n^3 + ... + nC_n^n = n \cdot 2^{n-1}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

5p **5.** Se consideră dreptele de ecuaţii $d_1 : 2x + 3y + 1 = 0$, $d_2 : 3x + y - 2 = 0$ şi $d_3 : x + y + a = 0$. Să se determine $a \in \mathbb{R}$ pentru care cele trei drepte sunt concurente.

5p **6.** Să se calculeze perimetrul triunghiului ABC, ştiind că $AB = 4$, $AC = 3$ şi $m(\sphericalangle BAC) = 60^\circ$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ şi mulţimea de matrice $M = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ b & a & 0 \\ c & b & a \end{pmatrix} \mid a,b,c \in \mathbb{C} \right\}$.

5p **a)** Să se calculeze A^3.

5p **b)** Să se arate că dacă $X \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ şi $AX = XA$, atunci $X \in M$.

5p **c)** Să se arate că, dacă $n \geq 2$ este un număr natural, atunci ecuaţia $X^n = A$ nu are soluţii.

2. Se consideră $n \in \mathbb{N}^*$, $a, b, c \in \mathbb{Q}$, $a \neq 0$ şi polinomul $f = aX^n + bX + c$.

5p **a)** Să se arate că dacă $a, b, c \in \mathbb{Z}$, atunci numărul $f(3) - f(1)$ este par.

5p **b)** Să se demonstreze că dacă $a, b, c, t \in \mathbb{Z}$, numărul $f(f(t)) - f(t)$ este divizibil cu $f(t) - t$.

5p **c)** Să se demonstreze că dacă $f(1) = 4$ şi $f(4) = 6$, atunci f nu poate avea toţi coeficienţii întregi.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x + \ln(x^2 + x + 1)$.

5p **a)** Să se demonstreze că funcţia f este bijectivă.

5p **b)** Să se calculeze derivata inversei funcţiei f în punctul $y_0 = 2 + \ln 3$.

5p **c)** Să se arate că graficul funcţiei f nu are asimptotă oblică spre $+\infty$.

2. Se consideră funcţia $\mathrm{F} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \{x\}(1 - \{x\})$, unde $\{x\}$ este partea fracţionară a numărului real x.

5p **a)** Să se demonstreze că funcţia f admite primitive pe $\mathbb{R}$.

5p **b)** Să se calculeze $\int_0^2 f(x)\,dx$.

5p **c)** Să se arate că valoarea integralei $\int_a^{a+1} f(x)\,dx$ nu depinde de numărul real a.

Varianta 39

KRtm

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Se consideră numărul complex $z = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$. Să se demonstreze că numerele complexe 1, z şi z^2 sunt afixele vârfurilor unui triunghi echilateral.

5p **2.** Să se rezolve în $\mathbb{R}$ inecuaţia $-x^2 + 4x - 3 \geq 0$.

5p **3.** Să se demonstreze că funcţia $f:[1;\infty) \to [2;\infty)$, $f(x) = x + \frac{1}{x}$ este inversabilă.

5p **4.** Să se determine numărul funcţiilor $f:\{1,2,3\} \to \{0,1,2,3\}$ ştiind că $f(1)$ este număr par.

5p **5.** Fie ABC un triunghi care are $AB = 2$, $AC = 3$ şi $BC = 2\sqrt{2}$. Să se calculeze $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.

5p **6.** Să se demonstreze că $\sin 15^\circ = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră matricele $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

5p **a)** Să se arate că, pentru orice $x \in \mathbb{R}$, $\det(xA) = x^2 \det(A)$.

5p **b)** Să se arate că $\det(A+B) + \det(A-B) = 2(\det(A) + \det(B))$.

5p **c)** Să se arate că $\det(A^2 + B^2) \geq \det(AB - BA)$.

2. Se consideră mulţimea $M = \left\{ a + b\sqrt{5} \;\middle|\; a, b \in \mathbb{Z},\ a^2 - 5b^2 = 1 \right\}$.

5p **a)** Să se arate că $z = 9 + 4\sqrt{5} \in M$.

5p **b)** Să se demonstreze că $(M, \cdot)$ este un subgrup al grupului multiplicativ $(\mathbb{R}^*, \cdot)$.

5p **c)** Să se demonstreze că mulţimea M are o infinitate de elemente.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcţia $f:(0,\infty) \to \mathbb{R}, f(x) = x^x$ şi şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ cu proprietatea $x_0 \in (0,1)$, $x_{n+1} = f(x_n), \forall n \in \mathbb{N}$.

5p **a)** Să se determine monotonia funcţiei.

5p **b)** Să se demonstreze că funcţia f este convexă.

5p **c)** Să se demonstreze că şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este convergent.

2. Se consideră şirul $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ definit prin $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{4x+5}dx, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

5p **a)** Să se calculeze I_2.

5p **b)** Să se arate că şirul $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ verifică relaţia $4I_{n+1} + 5I_n = \frac{1}{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

5p **c)** Să se determine $\lim\limits_{n\to\infty} nI_n$.

Varianta 40

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Se consideră $a \in \mathbb{R}$ şi numărul complex $z = \dfrac{a+2i}{2+ai}$. Să se determine a pentru care $z \in \mathbb{R}$.

5p **2.** Să se demonstreze că dreapta de ecuație $y = 2x + 3$ este tangentă la parabola de ecuație $y = x^2 - 4x + 12$.

5p **3.** Să se rezolve ecuația $\sqrt{x+2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x-2\sqrt{x-1}} = 4$.

5p **4.** Se consideră mulțimea $A = \{1,2,3,4,5,6\}$. Să se determine probabilitatea ca, alegând o pereche (a,b) din produsul cartezian $A \times A$, să avem egalitatea $a + b = 6$.

5p **5.** În sistemul cartezian de coordonate xOy se consideră punctele $M(2,-1)$, $A(1,\ 2)$ şi $B(4,\ 1)$. Să se determine lungimea vectorului $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}$.

5p **6.** Să se demonstreze egalitatea $\sin(a+b)\cdot\sin(a-b) = \sin^2 a - \sin^2 b,\ \forall a,b \in \mathbb{R}$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră matricele $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 9 & 6 \\ 2 & 6 & 4 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$,

$B = I_3 + A$, $C = I_3 + aA$, cu $a \in \mathbb{R}$.

5p **a)** Să se calculeze $S = A - XY$.

5p **b)** Să se determine $a \in \mathbb{R}$ astfel încât $BC = I_3$.

5p **c)** Să se demonstreze că dacă $n \in \mathbb{N}^*$, atunci elementele matricei B^n sunt mai mici decât 15^n.

2. Se consideră polinomul $f = X^3 - 1 \in \mathbb{R}[X]$ şi numărul $\varepsilon \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, astfel încât $f(\varepsilon) = 0$.

5p **a)** Să se demonstreze că $\varepsilon^2 + \varepsilon + 1 = 0$.

5p **b)** Să se rezolve în mulțimea numerelor complexe sistemul $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x + y\varepsilon + z\varepsilon^2 = 0 \\ x + y\varepsilon^2 + z\varepsilon = 0 \end{cases}$.

5p **c)** Să se arate că, dacă f divide $f_1(X^3) + Xf_2(X^3) + X^2 f_3(X^3)$, unde f_1, f_2, f_3 sunt polinoame cu coeficienți complecşi, atunci fiecare dintre polinoamele f_1, f_2, f_3 este divizibil cu $X - 1$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \sqrt{x^2+2} - \sqrt{x^2+1}$.

5p **a)** Să se demonstreze că funcția f este strict crescătoare pe intervalul $(-\infty, 0]$.

5p **b)** Să se arate că graficul funcției f are exact două puncte de inflexiune.

5p **c)** Să se determine ecuația asimptotei la graficul funcției f spre $-\infty$.

2. Se consideră funcțiile $F_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ F_n(x) = \int_0^x t \sin^n t\, dt,\ \forall n \in \mathbb{N}^*$.

5p **a)** Să se calculeze $F_2(\pi)$.

5p **b)** Să se demonstreze că $F_{n+1}(1) < F_n(1),\ \forall n \in \mathbb{N}^*$.

5p **c)** Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} F_n(1)$.

Varianta 41

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Se consideră numerele reale $a=\lg 2$ şi $b=\lg 3$. Să se demonstreze că $(2-2a)\log_{25}12=2a+b$.

5p **2.** Să se determine imaginea funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{2x}{x^2+1}$.

5p **3.** Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuaţia $3^{x+1}=-3x-2$.

5p **4.** Să se determine numărul funcţiilor $f:\{1,2,3\}\to\{1,2,3,4\}$ care nu sunt injective.

5p **5.** În sistemul cartezian de coordonate xOy se consideră punctele $A(2,-1)$ şi $B(-1,1)$. Să se determine ecuaţia dreptei ce trece prin originea axelor şi este paralelă cu dreapta AB.

5p **6.** Fie a şi b numere reale astfel încât $\sin a+\sin b=1$ şi $\cos a+\cos b=\dfrac{1}{2}$. Să se calculeze $\cos(a-b)$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Pentru $a,b,c,p,q,r\in\mathbb{C}$, se consideră ecuaţia (E): $t^3-at^2+bt-c=0$, cu rădăcinile $t_1=p$, $t_2=q$, $t_3=r$ şi sistemul $\begin{cases}x+py+p^2z=p^3\\x+qy+q^2z=q^3\\x+ry+r^2z=r^3\end{cases}$.

5p **a)** Să se arate că determinantul sistemului este $\Delta=(p-q)(q-r)(r-p)$.

5p **b)** Dacă p, q, r sunt distincte, să se rezolve sistemul.

5p **c)** Dacă matricea sistemului are rangul 1, să se arate că $b=\dfrac{1}{3}a^2$ şi $c=\dfrac{1}{27}a^3$.

2. Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\end{pmatrix}$ şi mulţimea $G=\left\{A^n \,\middle|\, n\in\mathbb{N}^*\right\}$.

5p **a)** Să se calculeze rangul matricei $B=A+A^2+A^3+A^4$.

5p **b)** Să se arate că $(G,\cdot)$ este un grup comutativ, unde „$\cdot$" este înmulţirea matricelor.

5p **c)** Să se rezolve în G ecuaţia $X^{2007}=A^2X$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to(-\infty,0)$, $f(x)=\ln(1+x)-x$.

5p **a)** Să se demonstreze că funcţia f este strict descrescătoare pe intervalul $(0,+\infty)$.

5p **b)** Să se arate că funcţia f este surjectivă.

5p **c)** Să se arate că graficul funcţiei f nu admite asimptote.

2. Se consideră funcţiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=1+x+x^2+x^3+x^4$ şi $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $F(x)=\int_0^x f(t)\,dt$.

5p **a)** Să se arate că funcţia F este strict crescătoare pe $\mathbb{R}$.

5p **b)** Să se arate că funcţia F este bijectivă.

5p **c)** Să se calculeze $\int_0^a F^{-1}(x)\,dx$, unde F^{-1} este inversa funcţiei F şi $a=1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{5}$.

Varianta 42

KRIt

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Să se calculeze partea întreagă a numărului $S_n = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{3^3} + ... + \frac{(-1)^n}{3^n}$, $n \in \mathbb{N}^*$.

5p **2.** Rezolvați în $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ sistemul $\begin{cases} y = x^2 - 3x + 1 \\ y = 2x^2 + x + 4 \end{cases}$.

5p **3.** Să se demonstreze că $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$, $\forall x \in (0; \infty)$.

5p **4.** Să se determine numărul termenilor raționali ai dezvoltării $(\sqrt{2} + \sqrt[4]{3})^{100}$.

5p **5.** Să se arate că punctele $A(-1, 5)$, $B(1,1)$ și $C(3,-3)$ sunt coliniare.

5p **6.** Să se calculeze suma pătratelor lungimilor medianelor unui triunghi care are lungimile laturilor 4, 5 și 7.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră matricele $A_0, B_0, A, B \in M_2(\mathbb{C})$, $A_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, astfel încât $AB - BA = A$.

5p **a)** Să se demonstreze că $A_0B_0 - B_0A_0 = A_0$.

5p **b)** Să se demonstreze că $A^nB - BA^n = nA^n$, pentru orice $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$.

5p **c)** Să se demonstreze că $\det(A) = 0$.

2. Se consideră polinomul $f \in \mathbb{R}[X]$, $f = 4X^3 - 12X^2 + aX + b$.

5p **a)** Să se determine $a, b \in \mathbb{R}$, astfel încât polinomul *f* să se dividă cu polinomul $X^2 - 1$.

5p **b)** Să se determine $a, b \in \mathbb{R}$, astfel încât ecuația $f(x) = 0$ să aibă soluția $x = i \in \mathbb{C}$.

5p **c)** Să se determine $a, b \in \mathbb{R}$, astfel încât polinomul să aibă rădăcinile x_1, x_2, x_3 în progresie aritmetică și, în plus, $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 11$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Fie funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x \operatorname{arctg} x$ și șirul $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ definit de $x_1 = 1$, $x_{n+1} = f(x_n)$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

5p **a)** Să se demonstreze că funcția f' este strict crescătoare pe $\mathbb{R}$.

5p **b)** Să se determine ecuația asimptotei la graficul funcției f spre $-\infty$.

5p **c)** Să se arate că șirul $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ este convergent.

2. Fie șirul $(I_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, definit prin $I_n = \int_0^1 (x - x^2)^n \, dx$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

5p **a)** Să se calculeze I_2.

5p **b)** Să se demonstreze că $I_n = \frac{n}{4n+2} I_{n-1}$, $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2$.

5p **c)** Să se calculeze $\lim_{n \to \infty} 2^n I_n$.

Varianta 43

KRt

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Să se determine valoarea de adevăr a afirmației: „Suma oricăror două numere iraționale este număr irațional.”

5p **2.** Graficul unei funcții de gradul al doilea este o parabolă care trece prin punctele $A(1,-3)$, $B(-1,3)$, $C(0,1)$. Să se determine coordonatele vârfului acestei parabole.

5p **3.** Să se rezolve ecuația $x+2^x=3$.

5p **4.** Fie mulțimea $A=\{1,2,3,4,5,6\}$. Să se calculeze probabilitatea ca, alegând o pereche (a,b) din produsul cartezian $A\times A$, produsul numerelor a și b să fie impar.

5p **5.** În sistemul cartezian de coordonate xOy se consideră punctele $A(1,\ 3)$ și $C(-1,\ 1)$. Să se determine coordonatele punctelor B și D astfel încât patrulaterul $ABCD$ să fie pătrat.

5p **6.** Să se demonstreze că $\sin 105^\circ=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră mulțimea $M=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a,b,c,d\in\mathbb{N}\right\}$ și matricea $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\in M$.

5p **a)** Să se arate că $A^{-1}\notin M$.

5p **b)** Să se determine toate matricele inversabile $B\in M$ care au proprietatea $B^{-1}\in M$.

5p **c)** Să se determine numărul matricelor $C\in M$ care au proprietatea $C^2=C+2I_2$.

2. Se consideră ecuația $x^4-8x^3+ax^2+8x+b=0$, cu $a,b\in\mathbb{R}$ și cu rădăcinile $x_1,x_2,x_3,x_4\in\mathbb{C}$.

5p **a)** Să se arate că $(x_1+x_4)(x_2+x_3)+x_1x_4+x_2x_3+(x_1+x_4)x_2x_3+(x_2+x_3)x_1x_4=a-8$.

5p **b)** Să se determine $a\in\mathbb{R}$ astfel încât $x_1+x_4=x_2+x_3$.

5p **c)** Să se determine $a,b\in\mathbb{R}$, astfel încât x_1,x_2,x_3,x_4 sunt în progresie aritmetică.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}^*\to\mathbb{R},\ f(x)=x+e^{-x}$.

5p **a)** Să se demonstreze că funcția f este strict crescătoare pe intervalul $[0,+\infty)$.

5p **b)** Să se arate că funcția f admite un punct de extrem local.

5p **c)** Să se determine numărul de soluții reale ale ecuației $f(x)=m$, unde m este un număr real oarecare.

2. Fie funcțiile $f:\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)\to\mathbb{R},\ f(x)=\displaystyle\int_1^{\operatorname{tg}x}\frac{t}{1+t^2}\,dt$ și $g:\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)\to\mathbb{R},\ g(x)=\displaystyle\int_1^{\operatorname{ctg}x}\frac{1}{t(1+t^2)}\,dt$.

5p **a)** Să se calculeze $f\left(\dfrac{\pi}{3}\right)$.

5p **b)** Să se calculeze $f'(x),\ x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$.

5p **c)** Să se arate că $f(x)+g(x)=0,\ \forall x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$.

Varianta 44

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Să se determine partea imaginară a numărului complex $z=\dfrac{1-i}{1+i}$.

5p **2.** Să se determine valorile reale ale lui m pentru care $x^2+mx\geq -1$, oricare ar fi $x\in\mathbb{R}$.

5p **3.** Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația $(2+\sqrt{3})^x+(2-\sqrt{3})^x=4$.

5p **4.** Se consideră mulțimea $A=\{0,1,2,3,\ldots,9\}$. Să se determine numărul submulțimilor mulțimii A care au 5 elemente dintre care exact două sunt numere pare.

5p **5.** În sistemul cartezian de coordonate xOy se consideră punctele $B(-2,\ 2)$ și $C(2,\ -2)$. Să se determine coordonatele punctelor A pentru care triunghiul ABC este echilateral.

5p **6.** Știind că $\alpha\in\left(\dfrac{\pi}{2},\pi\right)$ și că $\sin\alpha=\dfrac{3}{5}$, să se calculeze $\operatorname{ctg}\alpha$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră matricele $A,B\in\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&1&2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&2\\0&0&-1\end{pmatrix}$ și mulțimea de matrice $M=\left\{X\in\mathcal{M}_3(\mathbb{R})\,\middle|\,X^2=I_3\right\}$.

5p **a)** Să se verifice că $A\notin M$ și $B\in M$.

5p **b)** Să se arate că mulțimea M are o infinitate de elemente.

5p **c)** Să se demonstreze că $\forall\, n\in\mathbb{N}^*$, $A^n\neq I_3$.

2. Se consideră $a,b,c\in\mathbb{Z}$, $n\in\mathbb{N}^*$, $p,q,r\in\mathbb{Q}$ și polinomul $f=pX^n+qX+r$, astfel încât $f(a)=1$, $f(b)=2$, $f(c)=3$.

5p **a)** Dacă $a=-1$, $b=0$, $c=1$ și $n=3$, să se determine p,q,r.

5p **b)** Să se arate că dacă $p,q,r\in\mathbb{Z}$, atunci $\forall\, x,y\in\mathbb{Z}$, numărul $f(x)-f(y)$ este divizibil cu $x-y$.

5p **c)** Să se arate că dacă $p,q,r\in\mathbb{Z}$, atunci a,b,c sunt în progresie aritmetică cu rația 1.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{ax+b}{\sqrt{x^2+x+1}}$, $a,b\in\mathbb{R}$.

5p **a)** Să se calculeze $f'(x)$, $\forall x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Să se arate că funcția f este strict crescătoare pe $\mathbb{R}$ dacă și numai dacă $a=2b>0$.

5p **c)** Să se determine mulțimea valorilor funcției, pentru $b=1$ și $a=2$.

2. Fie funcția $f:[-1,1]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\int_0^x e^{\arcsin t}\,dt$.

5p **a)** Să se arate că funcția f este strict monotonă.

5p **b)** Să se demonstreze că f este funcție pară.

5p **c)** Să se determine $f(1)$.

Varianta 45

KRtm

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Să se determine partea întreagă a numărului $\dfrac{1}{5\sqrt{2}-4\sqrt{3}}$.

5p **2.** Fie x_1 şi x_2 soluţiile reale ale ecuaţiei $x^2+x-1=0$. Să se demonstreze că numărul $\dfrac{x_1}{x_2^2}+\dfrac{x_2}{x_1^2}\in\mathbb{Z}$.

5p **3.** Să se rezolve ecuaţia $2\cdot 3^x+3^{1-x}=7$.

5p **4.** Se consideră mulţimile $A=\{1,2,3,4\}$ şi $B=\{1,2,3,4,5,6\}$. Să se determine numărul funcţiilor strict crescătoare $f:A\to B$.

5p **5.** În sistemul cartezian de coordonate xOy se consideră punctele $A(1,\,3)$, $B(-2,\,1)$ şi $C(-3,-1)$. Să se determine coordonatele ortocentrului triunghiului ABC.

5p **6.** Să arate că $2(\sin 75^\circ-\sin 15^\circ)=\sqrt{2}$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}2&0\\4&2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}$ şi mulţimea $C(A)=\left\{X\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})\,\middle|\,XA=AX\right\}$.

5p **a)** Să se arate că $B\in C(A)$.

5p **b)** Să se arate că dacă $X\in C(A)$, atunci există $x,y\in\mathbb{R}$, astfel încât $X=\begin{pmatrix}x&0\\y&x\end{pmatrix}$.

5p **c)** Să se rezolve ecuaţia $X+X^3=A$.

2. Se consideră mulţimile $G=(-1,1)$ şi $P=(0,\infty)$, funcţia $f:G\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{1-x}{1+x}$ şi corespondenţa $(x,y)\to x*y$, unde $x*y=\dfrac{x+y}{1+xy}$, $\forall\, x,y\in G$.

5p **a)** Să se arate că această corespondenţă defineşte o lege de compoziţie pe G.

5p **b)** Să se arate că $\forall x,y\in G,\ f(x*y)=f(x)f(y)$.

5p **c)** Să se calculeze $\dfrac{1}{2}*\dfrac{1}{3}*\ldots*\dfrac{1}{99}$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\dfrac{x^2+ax+5}{\sqrt{x^2+1}},\ a\in\mathbb{R}$.

5p **a)** Să se calculeze $f'(x),\forall x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Să se determine toate valorile numărului real a astfel încât funcţia f să aibă trei puncte de extrem local.

5p **c)** Să se determine ecuaţia asimptotei spre $+\infty$ la graficul funcţiei f, în cazul $a=0$.

2. Fie funcţia $f:[-1,1]\to\mathbb{R},\ f(x)=\sqrt{1-x^2}$.

5p **a)** Să se calculeze $\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\,dx$.

5p **b)** Să se determine volumul corpului obţinut în urma rotirii graficului funcţiei f în jurul axei Ox.

5p **c)** Să se determine $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 x^n f(x)\,dx$.

Varianta 46

KRtm

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Fie $(a_n)_{n\geq 1}$ o progresie aritmetică. Ştiind că $a_3 + a_{19} = 10$, să se calculeze $a_6 + a_{16}$.

5p **2.** Să se determine valorile parametrului real m pentru care ecuaţia $x^2 - mx + 1 - m = 0$ are două rădăcini reale distincte şi strict pozitive.

5p **3.** Să se rezolve ecuaţia $\lg^2 x + \lg x = 6$.

5p **4.** Se consideră mulţimile $A = \{1, 2, 3\}$ şi $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Să se determine numărul funcţiilor strict descrescătoare $f : A \to B$.

5p **5.** În sistemul cartezian de coordonate xOy se consideră punctele $M(2, -1)$, $N(-1, 1)$ şi $P(0, 3)$. Să se determine coordonatele punctului Q astfel încât $MNPQ$ să fie paralelogram.

5p **6.** Să se calculeze lungimea medianei duse din A în triunghiul ABC, ştiind că $AB = 2$, $AC = 3$ şi $BC = 4$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră matricele $O_2, I_2, A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $O_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

5p **a)** Să se demonstreze că $\forall x \in \mathbb{R}$, $\det(A - xI_2) = x^2 - (a+d)x + ad - bc$.

5p **b)** Dacă $A^2 = O_2$, să se demonstreze că $a + d = 0$.

5p **c)** Dacă $A^2 = O_2$, să se arate că pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\det(A + I_2) + \det(A + 2I_2) + \ldots + \det(A + nI_2) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

2. Se consideră mulţimea $G = \left\{ (a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \,\middle|\, a^2 - 3b^2 = 1 \right\}$ şi operaţia

$(a, b) * (c, d) = (ac + 3bd, ad + bc)$.

5p **a)** Să se arate că $\forall (a, b), (c, d) \in G$, $(a, b) * (c, d) \in G$.

5p **b)** Să se arate că $(G, *)$ este grup.

5p **c)** Să se arate că mulţimea G are o infinitate de elemente.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcţia $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{|\ln x|}{\sqrt{x}}$.

5p **a)** Să se determine domeniul de derivabilitate al funcţiei f.

5p **b)** Să se determine numărul soluţiilor reale ale ecuaţiei $f(x) = m$, unde m este un parametru real.

5p **c)** Să se arate că $3^{\sqrt{5}} < 5^{\sqrt{3}}$.

2. Fie funcţiile $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \int_0^x t \sin 2t \, dt$ şi $g : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}$, $g(x) = \int_0^{\cos^2 x} \arccos \sqrt{t} \, dt$.

5p **a)** Să se calculeze $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

5p **b)** Să se calculeze $g'(x)$, unde $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

5p **c)** Să se demonstreze că $f(x) + g(x) = \frac{\pi}{4}$, $\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Se consideră şirul de numere reale $(x_n)_{n\geq 1}$ şi $S_n = x_1 + x_2 + \ldots + x_n$, $n \in \mathbb{N}^*$. Ştiind că $2S_n = 3^n - 1, \forall n \geq 1$, să se demonstreze că $(x_n)_{n\geq 1}$ este progresie geometrică.

5p **2.** Să se determine coordonatele punctelor de intersecţie dintre dreapta de ecuaţie $y = 2x + 1$ şi parabola de ecuaţie $y = x^2 + x + 1$.

5p **3.** Să se rezolve ecuaţia $3^x + 4^x = 5^x$.

5p **4.** Să se determine probabilitatea ca, alegând un număr natural de patru cifre, acesta să fie divizibil cu 9.

5p **5.** În sistemul cartezian de coordonate xOy se consideră punctele $A(-1, 1)$, $B(1, 3)$ şi $C(3, 2)$. Fie G centrul de greutate al triunghiului ABC. Să se determine ecuaţia dreptei OG.

5p **6.** Să se verifice egalitatea $\cos 75^\circ + \cos 15^\circ = \dfrac{\sqrt{6}}{2}$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ şi funcţia $f : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $f(X) = AX - XA$.

5p **a)** Să se calculeze $f(B)$.

5p **b)** Să se arate că, $\forall\, C, D \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $f(C + D) = f(C) + f(D)$.

5p **c)** Să se demonstreze că funcţia f nu este surjectivă.

2. Se consideră polinoamele $f, g \in \mathbb{R}[X]$, $f = X^3 + a^2X - a$, $g = aX^3 - a^2X^2 - 1$, cu $a \in \mathbb{R}^*$ şi $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{C}$ rădăcinile polinomului f.

5p **a)** Să se calculeze $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$.

5p **b)** Să se arate că rădăcinile polinomului g sunt inversele rădăcinilor polinomului f.

5p **c)** Să se arate că polinoamele f şi g nu au rădăcini reale comune.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \setminus \{1, -1\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \operatorname{arctg} \dfrac{1}{x^2 - 1}$.

5p **a)** Să se calculeze $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x > -1}} f(x)$.

5p **b)** Să se arate că graficul funcţiei f admite asimptotă spre $+\infty$.

5p **c)** Să se demonstreze că funcţia f admite un singur punct extrem local.

2. Fie funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{1 + x}{1 + x^2}$.

5p **a)** Să se arate că funcţia $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $F(x) = \operatorname{arctg} x + \dfrac{1}{2}\ln\left(x^2 + 1\right)$ este o primitivă a funcţiei f.

5p **b)** Să se calculeze $\int_0^1 f(x)dx$.

5p **c)** Să se arate că şirul $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, definit de $a_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{n + k}{n^2 + k^2}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, este convergent.

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Să se determine partea reală a numărului complex $\left(\sqrt{3}+i\right)^6$.

5p **2.** Se consideră funcția $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$ care are proprietatea că $\sqrt[3]{x}f(x)=1,\ \forall x>0$. Să se calculeze $(f\circ f)(512)$.

5p **3.** Să se rezolve în mulțimea $[0,2\pi]$ ecuația $\cos 2x+\sin x=0$.

5p **4.** Se consideră mulțimea $M=\{0,4,8,12,16,20,24\}$. Să se determine numărul tripletelor (a,b,c) cu proprietatea că $a,b,c\in M$, $a<b<c$ și că a,b,c sunt în progresie aritmetică.

5p **5.** Să se calculeze distanța dintre dreptele paralele de ecuații $x+2y=6$ și $2x+4y=11$.

5p **6.** În paralelogramul $ABCD$ se cunosc $AB=1$, $BC=2$ și $m(\sphericalangle BAD)=60^\circ$. Să se calculeze produsul scalar $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră sistemul $\begin{cases} x+2y+z=1 \\ 2x-y+z=1 \\ 7x-y+az=b \end{cases}$, unde a și b sunt parametri reali.

5p **a)** Să se determine $a\in\mathbb{R}$, pentru care determinantul sistemului este egal cu zero.

5p **b)** Să se determine valorile parametrilor $a,b\in\mathbb{R}$ pentru care sistemul este incompatibil.

5p **c)** Să se arate există o infinitate de valori ale lui a și b pentru care sistemul admite o soluție (x,y,z), cu x,y,z în progresie geometrică.

2. Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix}$, $a\in\mathbb{R}$, și mulțimea $G=\left\{ X(t)=\begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix} \middle| t\in[0,2\pi) \right\}$.

5p **a)** Să se determine a pentru care $A\in G$.

5p **b)** Să se demonstreze că G este un subgrup al grupului multiplicativ al matricelor nesingulare de ordin doi cu coeficienți reali.

5p **c)** Să se dea un exemplu de subgrup al lui $(G,\cdot)$ care să aibă 2008 elemente.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\arcsin\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)$.

5p **a)** Să se calculeze $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

5p **b)** Să se determine domeniul de derivabilitate al funcției f.

5p **c)** Să se demonstreze că funcția f are două puncte de extrem.

2. Fie funcția $f:[0,1]\to\mathbb{R},\ f(x)=\sqrt{1-x^2}$ și șirul $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, $a_n=\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{n^2-k^2}$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$.

5p **a)** Să se calculeze $\int_0^1 f(x)dx$.

5p **b)** Să se determine volumul corpului obținut prin rotirea graficului funcției f în jurul axei Ox.

5p **c)** Să se demonstreze că șirul $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este convergent.

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Să se calculeze partea întreagă a numărului real $\log_2 3 + \log_3 2$.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=(m+2)x^2-(m-1)x+m-1,\quad m\in\mathbb{R}\setminus\{-2\}$. Să se determine valorile parametrului real m astfel încât $f(x)\le 0$ pentru orice $x\in\mathbb{R}$.

5p **3.** Să se rezolve ecuația $x+2^x+\log_2 x=3$.

5p **4.** Fie mulțimea $A=\{1, 2, \ldots, 1000\}$. Să se calculeze probabilitatea ca, alegând un element din mulțimea $\left\{\sqrt[3]{n}\mid n\in A\right\}$, acesta să fie număr rațional.

5p **5.** Fie triunghiul ABC și $M\in(BC)$ astfel încât $\overrightarrow{MC}=-3\overrightarrow{MB}$. Să se demonstreze că $\overrightarrow{AM}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$.

5p **6.** Știind că $x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ și că $\operatorname{tg} x=3$, să se calculeze $\sin 4x$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră mulțimea $M=\left\{X=\begin{pmatrix} x & 0 & y\\ 0 & 0 & 0\\ -y & 0 & x\end{pmatrix}\,\middle|\, x,y\in\mathbb{R},\ x^2+y^2\ne 0\right\}$ și matricea

$$A=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & \sqrt{3}\\ 0 & 0 & 0\\ -\sqrt{3} & 0 & 1\end{pmatrix}$$

5p **a)** Să se arate că, pentru orice $X,Y\in M$, $XY\in M$.

5p **b)** Să se determine $E\in M$, astfel încât $\forall\, X\in M$, $EX=XE=X$.

5p **c)** Să se demonstreze că există o infinitate de numere naturale p, astfel încât $A^p=A$.

2. Se consideră pe $\mathbb{R}$ legea de compoziție dată de relația $x*y=xy-5x-5y+30$, $\forall\, x,y\in\mathbb{R}$ și mulțimea $G=(5,\infty)$.

5p **a)** Să se determine $e\in\mathbb{R}$ astfel încât $\forall\, x\in\mathbb{R}$, $x*e=e*x=x$.

5p **b)** Să se arate că $(G,*)$ este un grup comutativ.

5p **c)** Să se rezolve în grupul $(G,*)$ sistemul $\begin{cases} x*y=z\\ y*z=x\\ z*x=y\end{cases}$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:[1,+\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=\arccos\frac{4-3x^2}{x^3}$.

5p **a)** Să se determine domeniul de derivabilitate al funcției f.

5p **b)** Să se demonstreze că graficul funcției f admite o asimptotă spre $+\infty$.

5p **c)** Să se determine mulțimea valorilor funcției f.

2. Se consideră funcția $f:[1,2]\to\mathbb{R},\ f(x)=\frac{1}{x\sqrt{x^2+1}}$ și șirul $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, definit de

$$a_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{n}{(n+k)\sqrt{n^2+(n+k)^2}},\quad \forall n\in\mathbb{N}^*.$$

5p **a)** Să se arate că $F:[1,2]\to\mathbb{R},\ F(x)=\ln\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x}$ este o primitivă a funcției f.

5p **b)** Să se calculeze volumul corpului obținut prin rotirea graficului funcției f în jurul axei Ox.

5p **c)** Să se demonstreze că șirul $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este convergent.

Varianta 50

KRt

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Se consideră fracția zecimală infinită $\frac{10}{13} = 0,a_1a_2a_3\,....$ Să se calculeze $a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_{2008}$.

5p **2.** Să se arate că dreapta de ecuație $y = 2x - 1$ nu intersectează parabola de ecuație $y = x^2 + x + 1$.

5p **3.** Să se rezolve ecuația $(\sqrt{2}+1)^x + (\sqrt{2}-1)^x = 6$.

5p **4.** Într-o clasă sunt 25 de elevi dintre care 13 sunt fete. Să se determine numărul de moduri în care se poate alege un comitet reprezentativ al clasei format din 3 fete şi 2 băieți.

5p **5.** În sistemul cartezian de coordonate xOy se consideră punctele $A(2,-1)$, $B(-1,1)$, $C(1,3)$ şi $D(a,4)$, $a \in \mathbb{R}$. Să se determine a pentru care dreptele AB şi CD sunt perpendiculare.

5p **6.** Știind că $\alpha \in \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$ şi că $\sin\alpha = -\frac{4}{5}$, să se calculeze $\text{tg}\frac{\alpha}{2}$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$, transpusa sa $A^t \in \mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{R})$, $B = AA^t$, şi punctele $P_k(a_k, b_k)$, unde $k \in \{1,2,3\}$.

5p **a)** Să se calculeze B în cazul $P_1(1,2)$, $P_2(2,4)$, $P_3(-3,-6)$.

5p **b)** Să se arate că $\det(B) \geq 0$, oricare ar fi punctele P_1, P_2, P_3.

5p **c)** Să se arate că $\det(B) = 0$ dacă şi numai dacă punctele P_1, P_2, P_3 sunt coliniare pe o dreaptă care trece prin originea axelor.

2. Se consideră mulțimea $M = \left\{ \begin{pmatrix} \hat{1} & a & b \\ \hat{0} & \hat{1} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{0} & \hat{1} \end{pmatrix} \middle| \, a, b \in \mathbb{Z}_5 \right\}$.

5p **a)** Să se arate că $\forall\, A, B \in M$, $AB \in M$.

5p **b)** Să se demonstreze că $(M,\cdot)$ este un grup cu 25 de elemente, unde „·" este înmulțirea matricelor.

5p **c)** Să se demonstreze că orice element al grupului $(M,\cdot)$, diferit de elementul neutru, are ordinul 5.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$, $f(x) = x \cdot \sin\frac{1}{x}$.

5p **a)** Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbb{R}^*$.

5p **b)** Să se determine ecuația asimptotei la graficul funcției f către $+\infty$.

5p **c)** Să se demonstreze că f nu este monotonă pe $(0,+\infty)$.

2. Fie şirul $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, $I_n = \int_{-1}^{1}(1-x^2)^n\,dx$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

5p **a)** Să se calculeze I_2.

5p **b)** Să se demonstreze că $I_{n+1} = \frac{2n+2}{2n+3} I_n$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

5p **c)** Să se demonstreze că şirul $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, definit prin $a_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k C_n^k}{2k+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, are limita 0.

Varianta 51

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Să se determine numărul elementelor mulțimii $(A \setminus B) \cap \mathbb{Z}$ știind că $A = (-3;4]$ și $B = (1;5]$.

5p **2.** Să se determine punctele de intersecție dintre dreapta $2x+1=y$ și parabola $y = x^2 - x + 3$.

5p **3.** Să se rezolve ecuația: $\sqrt{x-1} + \sqrt{2-x} = 1$.

5p **4.** Să se determine numărul soluțiilor sistemului de inecuații $\begin{cases} x! < 7 \\ y! < 25 \end{cases}$, unde $x, y \in \mathbb{N}$.

5p **5.** Să se calculeze distanța de la punctul $A(1,1)$ la dreapta $d: 5x + 12y - 4 = 0$.

5p **6.** Știind că $a, b \in \left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$, să se arate că $1 - \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b > \operatorname{tg} a - \operatorname{tg} b$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Fie șirul $(F_n)_{n \geq 0}$, dat de $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}, \forall n \in \mathbb{N}^*$, $F_0 = 0, F_1 = 1$ și matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

5p **a)** Să se verifice relația $A^2 = A + I_2$.

5p **b)** Să se arate că, dacă $X \in M_2(\mathbb{Q})$, $X \neq O_2$ și $AX = XA$, atunci X este inversabilă.

5p **c)** Să se arate că $A^n = \begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix}, \forall n \geq 1$.

2. Fie $\sigma, \pi \in S_5$, $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix}$, $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 4 & 5 \end{pmatrix}$.

5p **a)** Să se demonstreze că $\sigma\pi \neq \pi\sigma$.

5p **b)** Să se arate că $H = \{\pi^n \mid n \in \mathbb{N}^*\}$ este un subgrup al grupului $(S_5, \cdot)$.

5p **c)** Să se determine $k \in \mathbb{N}$ pentru care grupul $(H, \cdot)$ este izomorf cu grupul $(\mathbb{Z}_k, +)$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f: [1, \infty) \to [1, \infty)$, $f(x) = \frac{x^2 - x + 1}{x}$.

5p **a)** Să se arate că funcția f este crescătoare.

5p **b)** Să se arate că funcția f este surjectivă.

5p **c)** Să se demonstreze că dacă $g: [1, \infty) \to [1, \infty)$ este o funcție crescătoare și surjectivă, atunci șirul $(g(n))_{n \geq 1}$ nu este mărginit superior.

2. Fie $a, b \in \mathbb{R}$ și funcția $F: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $F(x) = \begin{cases} ax + b, & x < 1 \\ \ln^2 x + 1, & x \geq 1 \end{cases}$.

5p **a)** Să se determine numerele reale a și b astfel încât funcția F să fie primitiva unei funcții f.

5p **b)** Să se calculeze $\int_1^e \frac{1}{xF(x)} dx$.

5p **c)** Să se demonstreze că, pentru funcția $h: [1, \pi] \to \mathbb{R}, h(x) = (F(x) - 1)\sin x$, $\int_1^{\pi} h(x) h''(x) dx \leq 0$.

Varianta 52

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Să se arate că funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=|4x-8|-2|4-2x|$ este constantă.

5p **2.** Să se determine valorile lui $a\in\mathbb{R}^*$ pentru care parabola $y=ax^2-2(a+1)x+a-1$ şi dreapta $y=2x+3$ au două puncte distincte comune.

5p **3.** Să se rezolve ecuația $\sqrt[3]{x-1}+1=x$.

5p **4.** Se consideră dezvoltarea $\left(\sqrt[5]{3}+1\right)^{144}$. Să se determine numărul termenilor iraționali ai dezvoltării.

5p **5.** Să se determine $m\in\mathbb{R}$ astfel încât vectorii $\vec{u}=(m+1)\vec{i}+8\vec{j}$ şi $\vec{v}=(m-1)\vec{i}-4\vec{j}$ să fie coliniari .

5p **6.** Triunghiul ABC are lungimile laturilor $AB=5$, $BC=7$ şi $AC=8$. Să se calculeze $m(\sphericalangle A)$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră permutarea $\sigma\in S_6$, $\sigma=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\2&4&5&3&6&1\end{pmatrix}$.

5p **a)** Să se determine σ^{-1}.

5p **b)** Să se arate că permutările σ şi σ^{-1} au acelaşi număr de inversiuni.

5p **c)** Să se arate că ecuația $x^4=\sigma$ nu are soluții în grupul $(S_6,\cdot)$.

2. Fie legea de compoziție „$\circ$”, definită pe $\mathbb{R}$ prin $x\circ y=xy-x-y+2,\ \forall x,y\in\mathbb{R}$, şi funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x+1$.

5p **a)** Să se arate că $(1,\infty)$ este parte stabilă în raport cu „$\circ$”.

5p **b)** Să se demonstreze că $f(xy)=f(x)\circ f(y)$ pentru orice $x,y\in\mathbb{R}$.

5p **c)** Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația $\underbrace{x\circ x\circ\ldots\circ x}_{10\text{ ori}}=1025$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:[0,1]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}x\sin\dfrac{\pi}{x},\ x\in(0,1]\\ 0,\ x=0\end{cases}$.

5p **a)** Să se arate că funcția f este continuă pe $[0,1]$.

5p **b)** Să se determine domeniul de derivabilitate al funcției f.

5p **c)** Să se arate că, dacă $n\in\mathbb{N}^*$, atunci ecuația $f(x)=\cos\dfrac{\pi}{x}$ are cel puțin o soluție în intervalul $\left(\dfrac{1}{n+1},\dfrac{1}{n}\right)$.

2. Fie funcțiile $f:[0,1]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\ln\left(1+x^2\right)$ şi $g:[0,1]\to\mathbb{R}$, $g(x)=x\operatorname{arctg}x$.

5p **a)** Să se calculeze $\int_0^1 f(\sqrt{x})dx$.

5p **b)** Să se calculeze $\int_0^1 g(x)dx$.

5p **c)** Să se calculeze aria suprafeței plane mărginită de graficele funcțiilor f şi g şi de dreptele de ecuații $x=0$ şi $x=1$.

Varianta 53

KRtm

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Să se calculeze $\left[\sqrt{2008}\right]+3\cdot\left\{-\frac{1}{3}\right\}$, unde $[x]$ reprezintă partea întreagă a lui x şi $\{x\}$ reprezintă partea fracţionară a lui x.

5p **2.** Să se determine imaginea intervalului $[1,3]$ prin funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-4x+3$.

5p **3.** Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuaţia: $\sqrt{x+8}-\sqrt{x}=2$.

5p **4.** Să se determine probabilitatea ca alegând un element al mulţimii divizorilor naturali ai numărului 56, acesta să fie divizibil cu 4.

5p **5.** Fie vectorii $\vec{a}=\vec{i}+\vec{j}$, $\vec{b}=\vec{i}-\vec{j}$ şi $\vec{u}=6\vec{i}+2\vec{j}$. Să se determine $p, r\in\mathbb{R}$ astfel încât $\vec{u}=p\vec{a}+r\vec{b}$.

5p **6.** Să se calculeze lungimea razei cercului circumscris unui triunghi care are lungimile laturilor 5 , 7 şi 8.

SUBIECTUL II (30p)

1. Pentru orice matrice $A\in M_2(\mathbb{C})$, se notează $C(A)=\{X\in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})\mid AX=XA\}$. Se consideră matricele $E_1=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}, E_2=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}, E_3=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}, E_4=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$.

5p **a)** Să se arate că dacă $X,Y\in C(A)$, atunci $X+Y\in C(A)$.

5p **b)** Să se arate că dacă $E_1,E_2\in C(A)$, atunci există $\alpha\in\mathbb{C}$ astfel încât $A=\alpha I_2$.

5p **c)** Să se arate că dacă $C(A)$ conţine trei dintre matricele E_1,E_2,E_3,E_4, atunci o conţine şi pe a patra.

2. Fie $a=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\3&2&1&4&5\end{pmatrix}$, $b=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\2&1&4&5&3\end{pmatrix}$ două permutări din grupul $(S_5,\cdot)$.

5p **a)** Să se rezolve în S_5 ecuaţia $ax=b$.

5p **b)** Să se determine ordinul elementului ab în grupul $(S_5,\cdot)$.

5p **c)** Să se arate că orice subgrup al grupului dat care conţine pe a şi pe b are cel puţin 30 de elemente.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^3-3x$ şi un număr real m din intervalul $(-2,\infty)$.

5p **a)** Să se determine punctele de extrem ale funcţiei f.

5p **b)** Să se demonstreze că ecuaţia $x^3-3x=m$ are soluţie unică în mulţimea $(1,\infty)$.

5p **c)** Notând cu h inversa funcţiei $g:(1,\infty)\to(-2,\infty), g(x)=x^3-3x$, să se calculeze $h'(2)$.

2. Fie funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}xe^x, & x\le 0\\ \sin x, & x>0\end{cases}$.

5p **a)** Să se arate că funcţia f admite primitive pe $\mathbb{R}$.

5p **b)** Să se determine o primitivă a lui f pe $\mathbb{R}$.

5p **c)** Să se calculeze $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\dfrac{\int_0^x f(t)dt}{x^2}$.

Varianta 54

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Să se calculeze partea întreagă a numărului $(\sqrt{3}+\sqrt{7})^2$.

5p **2.** Să se rezolve în $\mathbb{R}$ inecuația $\frac{2x-1}{1-x} \geq \frac{3x+2}{1-2x}$.

5p **3.** Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația $\sqrt[3]{2-x}+x=2$.

5p **4.** Se consideră dezvoltarea $(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt{y})^{49}$. Să se determine termenul care îi conține pe x şi pe y la aceeaşi putere.

5p **5.** Fie $\overrightarrow{r_A}=2\vec{i}+\vec{j}$, $\overrightarrow{r_B}=\vec{i}+3\vec{j}$ şi $\overrightarrow{r_C}=3\vec{i}+2\vec{j}$ vectorii de poziție ai vârfurilor triunghiului ABC. Să se determine vectorul de poziție al centrului de greutate a triunghiului ABC.

5p **6.** Să se demonstreze că în orice triunghi ascuțitunghic ABC are loc egalitatea $\frac{\operatorname{tg} A-\operatorname{tg} B}{\operatorname{tg} A+\operatorname{tg} B}=\frac{a^2-b^2}{c^2}$, unde $a=BC, b=AC, c=AB$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ şi $B=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}$.

5p **a)** Să se verifice că $AB \neq BA$.

5p **b)** Să se arate că $A^4+B^6=2I_2$.

5p **c)** Să se arate că, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, $(AB)^n \neq I_2$.

2. Se consideră şirul $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $F_0=0$, $F_1=1$, $F_{n+1}=F_n+F_{n-1}$, $\forall n \geq 1$ şi polinoamele $P, Q_n \in \mathbb{Z}[X]$, $P=X^2-X-1$, $Q_n=X^n-F_nX-F_{n-1}$, $\forall n \geq 2$.

5p **a)** Să se arate că polinomul X^3-2X-1 este divizibil cu P.

5p **b)** Să se determine rădăcinile reale ale polinomului Q_3.

5p **c)** Să se arate că, pentru orice $n \geq 2$, polinomul Q_n este divizibil cu P.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră mulțimea A a funcțiilor $g:[-1,1]\to\mathbb{R}$, care sunt continue pe $[-1,1]$, derivabile în punctele -1 şi 1, iar $g'(-1)<0$ şi $g'(1)>0$.

5p **a)** Să se arate că funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{|x|}{x^2+4}$ este un element al mulțimii A.

5p **b)** Să se arate că funcția f de la punctul **a)** nu este derivabilă în 0.

5p **c)** Să se arate că, dacă $g \in A$, atunci g are un punct de minim $x_0 \in (-1,1)$.

2. Se consideră funcția $f:[0,1]\to\mathbb{R}, f(x)=x(x-1)e^x$.

5p **a)** Să se arate că există $a,b,c\in\mathbb{R}$ astfel încât funcția $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, F(x)=(ax^2+bx+c)e^x$ să fie o primitivă a lui f.

5p **b)** Să se calculeze aria suprafeței cuprinse între graficul funcției şi axa Ox.

5p **c)** Să se calculeze volumul corpului obținut prin rotirea graficului funcției f în jurul axei Ox.

Varianta 55

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Să se calculeze $[-\sqrt{8}]+[\sqrt{18}]+[\sqrt{28}]-\{-2{,}8\}$, unde $[x]$ reprezintă partea întreagă a lui x şi $\{x\}$ reprezintă partea fracţionară a lui x.

5p **2.** Să se rezolve în mulţimea $\mathbb{C}$ sistemul $\begin{cases} x^2+y^2=13 \\ x^3+y^3=35 \end{cases}$.

5p **3.** Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuaţia $4^x-5\cdot 2^{x+1}+16=0$.

5p **4.** Să se determine $x\in\mathbb{N}$ astfel încât $C_x^2+A_x^2=30$.

5p **5.** Fie punctele $O(0;0)$, $A(2;1)$ şi $B(-2;1)$. Să se determine cosinusul unghiului format de vectorii $\overrightarrow{OA}$ şi $\overrightarrow{OB}$.

5p **6.** Să se determine coordonatele centrului de greutate al triunghiului determinat de dreptele de ecuaţii $x-2y-1=0$, $3x-y+7=0$, $x+3y-11=0$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Matricea $A=\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ şi şirurile $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ verifică $\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix}=A\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}, \forall n\in\mathbb{N}$.

5p **a)** Să se arate că $x_{n+1}^2+y_{n+1}^2=(a^2+b^2)(x_n^2+y_n^2)$, $\forall n\in\mathbb{N}$.

5p **b)** Să se arate că, dacă $a^2+b^2\le 1$, atunci şirurile $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sunt mărginite.

5p **c)** Să se arate că, dacă $a=1$ şi $b=\sqrt{3}$, atunci şirurile $(2^{-n}x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ şi $(2^{-n}y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sunt periodice.

2. Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\in\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

5p **a)** Fie $n\in\mathbb{N}^*$. Să se arate că $A^n=I_3$ dacă şi numai dacă 4 divide n.

5p **b)** Fie $G=\{A^n \mid n\in\mathbb{N}^*\}$. Să se arate că G, împreună cu operaţia de înmulţire a matricelor, formează un grup comutativ cu patru elemente.

5p **c)** Să se determine $n\in\mathbb{N}^*$ pentru care matricea $B=I_3+A+A^2+\ldots+A^n$ este un element inversabil al inelului matricelor pătratice de ordin trei cu coeficienţi reali.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt[3]{x^3-3x+2}$.

5p **a)** Să se calculeze $\lim\limits_{\substack{x\to 1 \\ x<1}}\dfrac{f(x)}{x-1}$.

5p **b)** Să se determine domeniul de derivabilitate al funcţiei f.

5p **c)** Să se determine punctele de extrem ale funcţiei f.

2. Fie funcţia $f:(1;\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{1}{x(x+1)(x+2)}$.

5p **a)** Să se determine o primitivă a funcţiei f.

5p **b)** Să se demonstreze că $\int_1^x f(t)dt\le\dfrac{x-1}{6}, \forall x\in[1,\infty)$.

5p **c)** Să se calculeze $\int_0^1\dfrac{x^2}{1+x^6}dx$.

Varianta 56

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Să se rezolve în $\mathbb{C}$ ecuaţia $|z| + z = 4 + 4i$.

5p **2.** Ştiind că x_1 şi x_2 sunt rădăcinile ecuaţiei $x^2 + 3x + 1 = 0$, să se calculeze $\frac{x_1^2 + 1}{x_1 + 1} + \frac{x_2^2 + 1}{x_2 + 1}$.

5p **3.** Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuaţia $5 \cdot 3^{2x} + \frac{1}{3} \cdot 15^x - 2 \cdot 25^x = 0$.

5p **4.** Se consideră dezvoltarea $\left(a^2 + \frac{1}{\sqrt[3]{a}}\right)^9$, $a \neq 0$. Să se determine rangul termenului care-l conţine pe a^4.

5p **5.** Să se calculeze $\vec{u}^2 - \vec{v}^2$ ştiind că $\vec{u} - \vec{v} = 3\vec{i} + 2\vec{j}$ şi $\vec{u} + \vec{v} = 2\vec{i} + 3\vec{j}$.

5p **6.** Să se calculeze lungimea razei cercului circumscris unui triunghi dreptunghic care are catetele de lungimi 5 şi 12.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ şi funcţia $f : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $f(X) = AX$.

5p **a)** Să se arate că $f(A) = I_2$.

5p **b)** Să se arate că $f(X + f(X)) = X + f(X)$, $\forall X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

5p **c)** Să se arate că pentru orice matrice $B \in M_2(\mathbb{R})$ există $X, Y \in M_2(\mathbb{R})$ astfel încât $B = X + Y$ şi $f(X) = X, f(Y) = -Y$.

2. Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ şi mulţimea $M = \{X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid AX = XA\}$.

5p **a)** Să se arate că dacă $X, Y \in M$, atunci $XY \in M$.

5p **b)** Să se arate că $G = \{X \in M \mid \det X \neq 0\}$ este grup în raport cu înmulţirea matricelor.

5p **c)** Să se determine elementele de ordin doi din grupul G, definit la punctual **b)**.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{4}{3}\right\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{2x + 5}{3x + 4}$.

5p **a)** Să determine limita şirului $(a_n)_{n \geq 1}$, $a_n = f(1)f(2)...f(n)$.

5p **b)** Să se determine asimptotele la graficul funcţiei *f*.

5p **c)** Să se determine punctele de inflexiune ale graficului funcţiei $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, g(x) = f(e^x)$.

2. Fie funcţia $f : [1, e] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{\ln x}$.

5p **a)** Să se justifice că funcţia $g : [0, e] \to \mathbb{R}, g(x) = \begin{cases} x - 2, x \in [0, 1) \\ f^2(x), x \in [1, e] \end{cases}$ nu admite primitive.

5p **b)** Să se calculeze volumul corpului obţinut prin rotaţia graficului funcţiei *f* în jurul axei Ox.

5p **c)** Să se arate că $\int_0^1 e^{x^2} dx + \int_1^e f(x) dx = e$.

SUBIECTUL I (30p)

5p 1. Fie $a=\frac{7}{11}$. Să se calculeze $\left[\frac{10}{a}+10a\right]$, unde $[x]$ reprezintă partea întreagă a lui x.

5p 2. Să se arate că $x^2+4x+5\geq\frac{1}{x^2+2x+2}$, oricare ar fi $x\in\mathbb{R}$.

5p 3. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația $\log_2^2 x+\log_2(4x)=4$.

5p 4. Se consideră dezvoltarea $\left(\sqrt[3]{x}+\frac{2}{\sqrt{x}}\right)^{200}$, $x>0$. Să se determine termenul care nu-l conține pe x.

5p 5. Se consideră dreapta $d:\ 4x-8y+1=0$ și punctul $A(2\ ;\ 1)$. Să se determine ecuația dreptei care trece prin punctul A și este paralelă cu dreapta d.

5p 6. Fie triunghiul ABC care are $AB=2$, $AC=4$ și $m(\sphericalangle A)=60^\circ$. Să se calculeze lungimea medianei duse din A.

SUBIECTUL II (30p)

1. Fie matricele $A=\begin{pmatrix}3 & 4\\ 2 & 3\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ și $\begin{pmatrix}x_n\\ y_n\end{pmatrix}\in M_{2,1}(\mathbb{R})$, cu $\begin{pmatrix}x_{n+1}\\ y_{n+1}\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}x_n\\ y_n\end{pmatrix}, \forall n\in\mathbb{N}$ și $x_0=1, y_0=0$.

5p a) Să se determine primii trei termeni ai șirurilor $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ și $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

5p b) Să se arate că $x_n+y_n\sqrt{2}=(3+2\sqrt{2})^n, \forall n\in\mathbb{N}$.

5p c) Să se arate că, dacă m și n sunt două numere naturale distincte, atunci originea axelor și punctele de coordonate (x_m,y_m), (x_n,y_n) sunt necoliniare.

2. Se consideră mulțimile de clase de resturi $\mathbb{Z}_7=\{\hat{0},\hat{1},\hat{2},\hat{3},\hat{4},\hat{5},\hat{6}\}$ și $\mathbb{Z}_6=\{\overline{0},\overline{1},\overline{2},\overline{3},\overline{4},\overline{5}\}$

5p a) Să se rezolve în corpul $(\mathbb{Z}_7,+,\cdot)$ ecuația $\hat{3}x^2+\hat{4}=\hat{0}$.

5p b) Să se determine un morfism de la grupul $(\mathbb{Z}_6,+)$ la grupul $(\mathbb{Z}_7^*,\cdot)$, care asociază lui $\overline{1}\in\mathbb{Z}_6$ pe $\hat{3}\in\mathbb{Z}_7$.

5p c) Să se determine numărul subgrupurilor grupului multiplicativ $(\mathbb{Z}_7^*,\cdot)$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+1$.

5p a) Să se arate că șirul $(x_n)_{n\geq1}$ definit prin $x_1=\frac{1}{2}$ și $x_{n+1}=f(x_n), \forall n\geq1$ are limită .

5p b) Să se arate că funcția $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=\begin{cases}xf(x) & , x\leq 0\\ \operatorname{arctg} x & , x>0\end{cases}$ este de două ori derivabilă pe $\mathbb{R}$.

5p c) Să se determine cel mai mare număr real a care are proprietatea $f(x)\geq a+2\ln x, \forall x\in\mathbb{R}$.

2. Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^{-x^2}$ și F o primitivă a sa.

5p a) Să se calculeze $\int_0^1 x^3 f(x)dx$.

5p b) Să se calculeze $\lim\limits_{x\to0}\frac{F(\cos x)-F(1)}{x^2}$.

5p c) Să se arate că funcția $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, g(x)=F(x)+f(x)$ are exact un punct de extrem local.

Varianta 58

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Să se demonstreze că dacă $n \geq 5$ este un număr natural, atunci $2^n > n^2 + n + 1$.

5p **2.** Se consideră funcţia $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 3x^2 - 6x + 1$. Să se determine axa de simetrie a graficului funcţiei f.

5p **3.** Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuaţia $3^{x+1} + 3^{1-x} = 10$.

5p **4.** Să se determine probabilitatea ca, alegând un element al mulţimii $A = \{1, 3, 5, ..., 2007\}$, acesta să fie multiplu de 3.

5p **5.** Se consideră dreapta $d:\ 2x + y - 1 = 0$ şi punctul $A(3,\ 2)$. Să se determine ecuaţia dreptei care trece prin punctul A şi este perpendiculară pe dreapta d.

5p **6.** Fie triunghiul ABC care are $AB = AC = 5$ şi $BC = 6$. Să se calculeze distanţa de la centrul de greutate al triunghiului ABC la dreapta BC.

SUBIECTUL II (30p)

1. Fie $a, b, c, d > 0$, matricea $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ şi funcţia $f:(0,\infty) \to (0,\infty)$, $f(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$.

Notăm $A^n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix}$, unde $n \in \mathbb{N}^*$.

5p **a)** Să se arate că, dacă $\det A \neq 0$, atunci funcţia f este injectivă.

5p **b)** Să se arate că $\underbrace{(f \circ f \circ f \circ ... \circ f)}_{\text{de } n \text{ ori } f}(x) = \dfrac{a_n x + b_n}{c_n x + d_n}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

5p **c)** Să se arate că, dacă $a \neq d$, atunci $\dfrac{b_n}{b} = \dfrac{c_n}{c} = \dfrac{a_n - d_n}{a - d}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

2. Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ şi mulţimea $G = \{I_2 + aA + bB \mid a, b \in \mathbb{R}, a \neq -1\}$.

5p **a)** Să se arate că orice matrice din G este inversabilă.

5p **b)** Să se arate că G este un subgrup al grupului multiplicativ al matricelor inversabile din $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

5p **c)** Să se arate că grupul $(G, \cdot)$ are o infinitate de elemente de ordin 2.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcţiile $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$ şi $g:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = \operatorname{arctg} x$.

5p **a)** Să se calculeze $\lim\limits_{x \to \infty}\left(f(x)g(x)\right)$.

5p **b)** Să se determine punctele de extrem local ale funcţiei f.

5p **c)** Să se arate că $\dfrac{x}{1+x^2} < \operatorname{arctg} x$, pentru orice $x \in (0, \infty)$.

2. Fie $m \in \mathbb{R}$ şi funcţia $f:[0,2] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x - m, x \in [0,1] \\ x \ln x, x \in (1,2] \end{cases}$.

5p **a)** Să se arate că, pentru orice $m \in \mathbb{R}$, funcţia f este integrabilă.

5p **b)** Să se calculeze $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} \dfrac{\int_1^x t \ln t \, dt}{x - 1}$.

5p **c)** Să se demonstreze că, în cazul $m = 1$, pentru orice $t \in (0,2)$ există $a, b \in [0,2]$, $a \neq b$, astfel încât $\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)f(t)$.

Varianta 59

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Să se calculeze suma $1+4+7+...+31$.

5p **2.** Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația $|x-3|+|4-x|=1$.

5p **3.** Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația $\log_3 x + \dfrac{1}{\log_3 x} = \dfrac{5}{2}$.

5p **4.** Să se determine probabilitatea ca, alegând un element al mulțimii $A=\{2,4,6,...,2008\}$, acesta să fie divizibil cu 4, dar să nu fie divizibil cu 8.

5p **5.** Se consideră punctele $A(2,m)$ și $B(m,-2)$. Să se determine $m\in\mathbb{R}$ astfel încât $AB=4$.

5p **6.** Să se arate că un triunghi ABC în care are loc relația $\sin\dfrac{C}{2}=\dfrac{c}{a+b}$ este isoscel.
($a=BC, b=AC, c=AB$)

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră $m\in\mathbb{R}$ și sistemul de ecuații liniare $\begin{cases} mx+y+z=0 \\ x+3y+2z=0 \\ -x-y+4z=0 \end{cases}$.

5p **a)** Să se determine valorile lui m pentru care matricea sistemului are determinantul nenul.

5p **b)** Să se determine m astfel încât sistemul să admită cel puțin două soluții.

5p **c)** Să se determine m pentru care dreptele $d_1: mx+y+1=0,\ d_2: x+3y+2=0,\ d_3: -x-y+4=0$ sunt concurente.

2. Se consideră mulțimea $H=\left\{\begin{pmatrix} m & n \\ \hat{0} & \hat{1}\end{pmatrix} \mid m,n\in\mathbb{Z}_5,\ m=\pm\hat{1}\right\}$.

5p **a)** Să se verifice că dacă $A=\begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{1} \\ \hat{0} & \hat{1}\end{pmatrix}$ și $B=\begin{pmatrix} \hat{4} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{1}\end{pmatrix}$, atunci $B\cdot A = A^{-1}\cdot B$

5p **b)** Să se arate că $(H,\cdot)$ este un grup cu 10 elemente.

5p **c)** Să se arate că orice element din H se scrie în mod unic de forma $A^i\cdot B^j$, $0\le i<5$, $0\le j<2$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția inversabilă $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^3+x$ și funcția $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=f^{-1}(x)$.

5p **a)** Să se calculeze $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{f(x+1)}$.

5p **b)** Să se calculeze $g'(2)$.

5p **c)** Să se calculeze $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{g(x)}{\sqrt[3]{x}}$.

2. Se consideră funcțiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2\sin x$ și F o primitivă a lui f.

5p **a)** Să se calculeze $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx$.

5p **b)** Să se determine $c\in(1,3)$ astfel încât $\int_1^3 \dfrac{f(x)}{\sin x}dx = 2c^2$.

5p **c)** Să se arate că funcția F nu are limită la $+\infty$.

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Să se arate că $2(1+3+3^2+...+3^8)<3^9$.

5p **2.** Fie x_1, x_2 rădăcinile ecuației $x^2+5x-7=0$. Să se arate că $x_1^3+x_2^3\in\mathbb{Z}$.

5p **3.** Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația $\log_5 x+\log_x 5=\frac{5}{2}$.

5p **4.** Să se determine $x\in\mathbb{N}$ astfel încât $C_{2x-3}^{11-x^2}=3$.

5p **5.** Se consideră punctele $A(2,3)$ și $B(-3,-2)$. Să se determine ecuația dreptei AB.

5p **6.** Fie vectorii $\vec{u}$ și $\vec{v}$. Știind că $\vec{u}\vec{v}=5$, $|\vec{u}|=2$ și $|\vec{v}|=3$ să se calculeze $\cos\left(\sphericalangle\left(\vec{u},\vec{v}\right)\right)$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix}2&1\\-4&-2\end{pmatrix}$ și funcția $f:M_2(\mathbb{R})\to M_2(\mathbb{R})$, $f(X)=AX$.

5p **a)** Să se calculeze $f(A)$.

5p **b)** Să se arate că $(f\circ f)(X)=O_2, \forall X\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

5p **c)** Să se arate că $f(X)+f(Y)\neq I_2, \forall X,Y\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

2. Se consideră mulțimea $P=\left\{A\in M_2(\mathbb{R})\mid AA^t=I_2\right\}$, unde A^t este transpusa matricei A.

5p **a)** Să se verifice dacă matricea $\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$ aparține mulțimii P.

5p **b)** Să se arate că înmulțirea matricelor determină pe mulțimea P o structură de grup necomutativ.

5p **c)** Să se arate că, dacă $A,B\in P$, $X\in M_2(\mathbb{R})$ și $AX=B$, atunci $X\in P$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcțiile $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\ln\left(1+\sqrt{1+x^2}\right)$ și $g(x)=\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$.

5p **a)** Să se demonstreze că ln2 este cea mai mică valoare a funcției *f*.

5p **b)** Să se arate că pentru orice $x>0$ este verificată relația $xe^{g(x)}\left(f\left(\frac{1}{x}\right)\right)'+g'(x)=0$.

5p **c)** Să se demonstreze că $g(x)<x$ pentru orice $x>0$.

2. Fie mulțimea $M=\left\{f:[0,1]\to\mathbb{R}\mid f \text{ este derivabilă și } \int_0^1 f(x)\,dx=f(0)=f(1)\right\}$.

5p **a)** Să se arate că dacă f este o funcție polinomială de grad trei, care aparține lui M, atunci $f\left(\frac{1}{2}\right)=f(0)$.

5p **b)** Să se arate că pentru orice $f\in M$, ecuația $f'(x)=0$ are cel puțin două soluții în intervalul $(0,1)$.

5p **c)** Să se arate că funcția $f:[0,1]\to\mathbb{R}, f(x)=\sqrt{x}+x-2x^2$ face parte din M.

Varianta 61

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Să se determine x real ştiind că numerele $x+1, 1-x$ şi 4 sunt în progresie aritmetică .

5p **2.** Să se determine punctele de intersecţie a parabolei $y=x^2+5x-6$ cu axele de coordonate.

5p **3.** Să se rezolve în $[0,2\pi]$ ecuaţia $2\sin x+1=0$.

5p **4.** Fie mulţimea $M=\{1,2,3,4,5,6\}$. Să se determine probabilitatea ca, alegând o submulţime a mulţimii M , aceasta să aibă cel puţin 2 elemente.

5p **5.** Punctele A , B şi G au vectorii de poziţie $\overrightarrow{r_A}=4\vec{i}+7\vec{j}$, $\overrightarrow{r_B}=2\vec{i}-\vec{j}$, $\overrightarrow{r_G}=4\vec{i}+4\vec{j}$. Să se determine vectorul de poziţie a punctului C astfel încât punctul G să fie centrul de greutate al triunghiului ABC .

5p **6.** Fie vectorii $\vec{u}$ şi $\vec{v}$. Dacă $|\vec{u}|=1$, $|\vec{v}|=2$ şi $m\left(\sphericalangle\left(\vec{u};\vec{v}\right)\right)=\frac{\pi}{3}$, să se calculeze $\left(2\vec{u}+\vec{v}\right)\left(2\vec{v}-\vec{u}\right)$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră mulţimea $G=\left\{M_{a,b} \mid M_{a,b}=\begin{pmatrix}1 & a & b\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}, a,b\in\mathbb{R}\right\}\subset M_3(\mathbb{R})$.

5p **a)** Să se arate că $M_{a,b}\cdot M_{c,d}=M_{a+c,b+d}$ $,\forall\, a,b,c,d\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Să se arate că orice matrice din G este inversabilă.

5p **c)** Să se calculeze, în funcţie de a şi b , rangul matricei $M_{a,b}-M_{a,b}^t$ ($M_{a,b}^t$ este transpusa lui $M_{a,b}$).

2. Se consideră un grup $(K,\cdot)$, unde $K=\{e,a,b,c\}$, e este elementul neutru şi $a^2=b^2=c^2=e$.

5p **a)** Să se rezolve în grupul K ecuaţia $x^3=e$.

5p **b)** Să se arate că $ab=c$.

5p **c)** Să se stabilească dacă grupul $(K,\cdot)$ este izomorf cu grupul $(\mathbb{Z}_4,+)$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Fie funcţia $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\ln x}{x-1}, & x\neq 1\\ 1, & x=1\end{cases}$.

5p **a)** Să se demonstreze că funcţia f este continuă.

5p **b)** Să se calculeze $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-1}{x-1}$.

5p **c)** Să se arate că funcţia f este strict descrescătoare.

2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\ln(1+\sin^2 x)$.

5p **a)** Să se calculeze $\int_0^{2\pi} e^{f(x)}dx$.

5p **b)** Să se calculeze $\int_0^{\pi} f(x)\sin x\,dx$.

5p **c)** Să se calculeze derivata funcţiei $g:(-1,1)\to\mathbb{R}$, $g(x)=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\arcsin x} f(t)\,dt$.

Varianta 62

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Să se determine $x>0$ ştiind că numerele x, 6 şi $x-5$ sunt în progresie geometrică .

5p **2.** Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+x-2$. Să se calculeze $f\left(2\cdot\left(f(-1)\right)\right)$.

5p **3.** Să se rezolve în $[0,2\pi]$ ecuaţia $\cos\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)=\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$.

5p **4.** Să se determine $k\in\mathbb{N}$ astfel încât $C_{48}^{4k}=C_{48}^{3k^2+9}$.

5p **5.** Se consideră punctele $A(3,2)$ şi $B(6,5)$. Să se determine coordonatele punctelor M şi N ştiind că acestea împart segmentul $[AB]$ în trei segmente congruente, iar ordinea punctelor este A,M,N,B.

5p **6.** Să se determine valorile parametrului $a\in\mathbb{Z}$ pentru care numerele a, $a+1$ şi $a+2$ sunt lungimile laturilor unui triunghi obtuzunghic.

SUBIECTUL II (30p)

1. Fie $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ cu proprietatea $A^2=2A$.

5p **a)** Să se verifice că matricea $\begin{pmatrix} 2\cos^2 x & \sin 2x \\ \sin 2x & 2\sin^2 x \end{pmatrix}$ are proprietatea indicată, pentru orice $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Să se arate că, dacă $a+d\neq 2$, atunci $A=O_2$ sau $A=2I_2$.

5p **c)** Să se arate că, dacă $a+d=2$, atunci $\det A=0$.

2. Se consideră polinoamele $f,g\in\mathbb{Z}[X]$, $f=X^8-1$, $g=X^6-1$.

5p **a)** Să se arate că un cel mai mare divizor comun al polinoamelor f şi g este X^2-1.

5p **b)** Să se determine numărul soluţiilor complexe distincte ale ecuaţiei $f(x)g(x)=0$.

5p **c)** Să se descompună polinomul f în factori ireductibili peste $\mathbb{Q}$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Pentru fiecare număr natural nenul n se consideră funcţia $f_n:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f_n(x)=x^n+\ln x$.

5p **a)** Să se arate că ecuaţia $f_n(x)=0$ are o singură rădăcină reală în intervalul $(0,1)$.

5p **b)** Dacă x_n este rădăcina reală a ecuaţiei $f_n(x)=0$ din intervalul $(0,1)$, să se studieze convergenţa şirului $(x_n)_{n\geq 1}$.

5p **c)** Să calculeze $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3}{f_2(x)-1}-\frac{1}{x-1}\right)$.

2. Fie $a\in\mathbb{R}$ şi funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases} x^3, & x\in(-\infty,0] \\ 1+\sin x, & x\in(0,\infty) \end{cases}$.

5p **a)** Să se arate că funcţia f nu admite primitive.

5p **b)** Să se calculeze $\int_{-1}^{\pi} f(x)\,dx$.

5p **c)** Să se arate că , pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$, $\int_0^{2\pi} f^n(x)\,dx\leq 2^n\pi$.

Varianta 63

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Să se arate că şirul $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, de termen general $a_n = \frac{4n}{n+3}$, este crescător.

5p **2.** Să se determine punctele de intersecţie ale parabolelor $y = x^2 + x + 1$ şi $y = -x^2 - 2x + 6$.

5p **3.** Să se rezolve în $[0, 2\pi]$ ecuaţia $\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(3x + \frac{\pi}{4}\right)$.

5p **4.** Suma coeficienţilor binomiali ai dezvoltării $\left(2x^2 - 5y\right)^n$ este egală cu 32. Să se determine termenul de rang patru.

5p **5.** Să se determine $m, n \in \mathbb{R}$ astfel încât dreptele $d_1: mx + 3y + 2 = 0$ şi $d_2: 2x + ny - 8 = 0$ să coincidă.

5p **6.** Fie $ABCD$ un patrulater. Să se arate că $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = 0$ dacă şi numai dacă $AB^2 + CD^2 = AD^2 + BC^2$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se Notează X^t transpusa matricei X şi se consideră mulţimile $P = \left\{S \in M_2(\mathbb{R}) \mid S^t = S\right\}$ (matrice simetrice) şi $Q = \left\{A \in M_2(\mathbb{R}) \mid A^t = -A\right\}$ (matrice antisimetrice).

5p **a)** Să se arate că mulţimile P şi Q sunt nevide.

5p **b)** Să se arate că dacă $A, B \in Q$ atunci $AB \in P$.

5p **c)** Să se arate că orice matrice $B \in M_2(\mathbb{R})$ se poate scrie sub forma $B = S + A$, $S \in P$, $A \in Q$.

2. Se consideră funcţia $\varphi: \mathbb{Z}[X] \to \mathbb{Z}_2[X]$, $\varphi\left(a_0 + a_1X + ... + a_nX^n\right) = \widehat{a_0} + \widehat{a_1}X + ... + \widehat{a_n}X^n$.

5p **a)** Să se rezolve în $\mathbb{Z}_2$ ecuaţia $\varphi(f) = \hat{0}$, ştiind că $f = 7X^3 + 12X^2 + 3X + 45$.

5p **b)** Să se arate că polinomul $\varphi(f)$ este ireductibil peste $\mathbb{Z}_2$.

5p **c)** Să se demonstreze că polinomul f nu poate fi scris ca produs de două polinoame neconstante, cu coeficienţi întregi.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră şirul de numere reale $(x_n)_{n\geq1}$, $x_n = \frac{1+2\sqrt{n}}{\sqrt{n}}$ şi funcţia $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x, & x \in \mathbb{Q} \\ x^3, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$.

5p **a)** Să se studieze convergenţa şirului $(a_n)_{n\geq1}$, $a_n = f(x_n)$.

5p **b)** Să arate că funcţia f este continuă în origine.

5p **c)** Să arate că funcţia f nu are proprietatea lui Darboux.

2. Se consideră $a, b \in \mathbb{R}$ şi funcţia $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} axe^x - x, & x \leq 0 \\ x\cos x + b, & x > 0 \end{cases}$.

5p **a)** Să se determine a şi b ştiind că f este primitivă pe $\mathbb{R}$ a unei funcţii.

5p **b)** Să se calculeze $\int_{-1}^{\pi} f(x)dx$, în cazul $a = 2, b = 0$.

5p **c)** Să se arate că, dacă $b = 0$, atunci $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^{\pi} x^n f(x)dx = -\infty$.

Varianta 64

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Să se arate că şirul $(a_n)_{n\geq 1}$, de termen general $a_n = n^2 - n$, este strict monoton.

5p **2.** Se consideră funcţiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ şi $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definite prin $f(x)=x^2+2x+1$ şi $g(x)=x-2008$. Să se demonstreze că, pentru orice $x\in\mathbb{R}$, $(f\circ g)(x)\geq 0$.

5p **3.** Să se rezolve în $(0,\pi)$ ecuaţia $\operatorname{tg}\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$.

5p **4.** Să se determine $x\in\mathbb{N}$ ştiind că $C_x^{x-1}+C_{x-1}^{x-3}\leq 9$.

5p **5.** Se consideră dreptele $d_1:\ mx+(m+2)y-1=0$ şi $d_2:\ (m+2)x+4my-8=0$. Să se determine $m\in\mathbb{R}$ astfel încât dreptele să fie paralele.

5p **6.** Fie ABC un triunghi cu $\operatorname{tg}A=2$, $\operatorname{tg}B=3$. Să se determine măsura unghiului C.

SUBIECTUL II (30p)

1. Fie mulţimea $M=\left\{\begin{pmatrix} x & 3y \\ y & x\end{pmatrix} \mid x,y\in\mathbb{Z}\right\}$ şi matricea $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2\end{pmatrix}$.

5p **a)** Să se arate că dacă $Y\in\mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ şi $AY=YA$, atunci $Y\in M$.

5p **b)** Să se arate că dacă $X\in M$ şi $\det X=0$, atunci $X=O_2$.

5p **c)** Să se arate că $A^n\in M, \forall n\in\mathbb{N}^*$.

2. Se consideră polinomul $f=X^5-X^4+3X^3-X^2-2\in\mathbb{C}[X]$.

5p **a)** Să se determine o rădăcină raţională a polinomului f.

5p **b)** Să se calculeze $x_1^2+x_2^2+\ldots+x_5^2$, unde $x_1,x_2,\ldots,x_5$ sunt rădăcinile lui f.

5p **c)** Să se arate că f are o singură rădăcină reală.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcţia $f:(-\infty,-2)\cup(0,\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=\ln\left(1+\frac{2}{x}\right)$.

5p **a)** Să se arate că funcţia f este concavă pe intervalul $(-\infty,-2)$.

5p **b)** Să calculeze limita şirului $(a_n)_{n\geq 1}, a_n=f(1)+f(2)+\ldots+f(n)-\ln\frac{n(n+1)}{2}$.

5p **c)** Să se arate că există un punct $c\in(1,2)$ astfel încât $(c-1)f'(c)+f(c)=f(2)$.

2. Fie funcţia $f:[0,1]\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{1}{1+x^4}$.

5p **a)** Să se calculeze $\int_0^1 xf(x)dx$.

5p **b)** Să se arate că $\frac{\pi}{4}\leq\int_0^1 f(x)dx\leq 1$.

5p **c)** Să se calculeze $\int_0^1 g(x)dx$, unde $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, g(x)=\int_0^x \frac{f(t)f''(t)-(f'(t))^2}{(f(t))^2}dt$.

Varianta 65

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Să se determine primul termen al progresiei aritmetice $a_1, a_2, 13, 17, \ldots$.

5p **2.** Să se arate că punctul $(0,\ 2)$ este centrul de simetrie al graficului funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^3+2$.

5p **3.** Să se rezolve în $[0,2\pi]$ ecuaţia $3\sin x+\sqrt{3}\cos x=0$.

5p **4.** Să se determine probabilitatea ca, alegând un număr din mulţimea numerelor naturale de trei cifre, acesta să aibă suma cifrelor egală cu 23 .

5p **5.** Să se determine $m\in\mathbb{R}$, ştiind că dreptele $d_1: mx+3y-2=0$ şi $d_2: 12x+2y+1=0$ sunt perpendiculare .

5p **6.** Ştiind că $\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$, să se calculeze $\sin\alpha$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră $a,b\in\mathbb{R}$ şi sistemul $\begin{cases} ax+y+z=4 \\ x+2y+3z=6 \\ 3x-y-2z=b \end{cases}$.

5p **a)** Să se determine a,b pentru care sistemul are soluţia (1, 1, 1).

5p **b)** Să se determine a,b astfel încât sistemul să fie incompatibil.

5p **c)** Să se arate că pentru orice $a\in\mathbb{Z}$ există $b\in\mathbb{Z}$ astfel încât sistemul să admită soluţii cu toate componentele întregi.

2. Se consideră mulţimea matricelor $A=\left\{\begin{pmatrix} a & \hat{0} & \hat{0} \\ \hat{0} & a & \hat{0} \\ b & c & a \end{pmatrix} \mid a,b,c\in\mathbb{Z}_2\right\}$.

5p **a)** Să se determine numărul elementelor mulţimii A.

5p **b)** Să se arate că adunarea şi înmulţirea matricelor determină pe A o structură de inel comutativ.

5p **c)** Să se determine numărul matricelor X din inelul de la punctul **b)** care verifică egalitatea $X^2=O$, unde O reprezintă elementul nul al inelului A.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x+e^x$ despre care se admite că este bijectivă, şi se defineşte şirul $(x_n)_{n\geq 0}$, cu $x_0=e$ şi $x_{n+1}=f^{-1}(1+x_n), \forall n\geq 0$.

5p **a)** Să se arate că $f(x)\geq 2x+1, \forall x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Să se demonstreze că, dacă $f(x)\geq mx+1, \forall x\in\mathbb{R}$, atunci $m=2$.

5p **c)** Să se arate că $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=0$.

2. Fie funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sin^3 x\cos x$ şi F o primitivă a funcţiei f pe $\mathbb{R}$.

5p **a)** Să arate că există $c\in\mathbb{R}$ astfel încât $4F(x)=\sin^4 x+c$.

5p **b)** Să se calculeze aria subgraficului restricţiei funcţiei f la intervalul $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$.

5p **c)** Să se demonstreze că funcţia $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $h(x)=\begin{cases} f(x^{-1}), & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$ admite primitive pe $\mathbb{R}$.

Varianta 66

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Să se calculeze $(2+i)(3-2i)-(1-2i)(2-i)$.

5p **2.** Să se determine o perioadă $T \in (1,2)$ a funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\{3x\}$.

5p **3.** Să se rezolve în $[0, 2\pi]$ ecuația $\sqrt{3}\sin x-\cos x=1$.

5p **4.** Să se determine rangul celui mai mare termen al dezvoltării $\left(\frac{1}{5}+\frac{4}{5}\right)^{100}$.

5p **5.** Se consideră punctele $A(2,3)$, $B(4,5)$, $C(2,2)$ și $D(m,n)$. Să se determine $m,n\in\mathbb{R}$ astfel încât patrulaterul $ABCD$ să fie paralelogram .

5p **6.** Se consideră patrulaterul $ABCD$, $(AC)\cap(BD)=\{O\}$ și S_1,S_2,S_3, respectiv S_4 ariile triunghiurilor AOB, BOC, COD, respectiv DOA. Să se arate că $S_1S_3=S_2S_4$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Fie $m\in\mathbb{R}$ și dreptele $d_1: x+2y=3,\ d_2: 3x-4y=-1,\ d_3: 4x+3y=m$.

5p **a)** Să se determine m astfel încât dreptele să fie concurente.

5p **b)** Să se demonstreze că există o infinitate de valori ale lui m pentru care vârfurile triunghiului determinat de cele trei drepte au toate coordonatele întregi.

5p **c)** Să se calculeze valorile lui m pentru care triunghiul determinat de cele trei drepte are aria 1.

2. Fie $a\in\mathbb{R}$ și polinomul $f=2X^3-aX^2-aX+2$, cu rădăcinile complexe x_1,x_2,x_3.

5p **a)** Să se arate că f are o rădăcină care nu depinde de a.

5p **b)** Să se determine valorile lui a pentru care polinomul are trei rădăcini reale.

5p **c)** Să se determine valorile lui a astfel încât $|x_1|+|x_2|+|x_3|=3$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=1-\sqrt{|1-x^2|}$.

5p **a)** Să se calculeze derivata funcției f pe intervalul $(-1,1)$.

5p **b)** Să se determine ecuația asimptotei spre $+\infty$ la graficul funcției f.

5p **c)** Să se arate că funcția $g:(0,\infty)\to\mathbb{R}, g(x)=x^{-2}f(x)$ este mărginită.

2. Fie funcția $f:[0,1]\to[1,3], f(x)=x^4+x^2+1$. Se admite că funcția f are inversa g.

5p **a)** Să se calculeze $\int_0^1 \frac{t(2t^2+1)}{f(t)}dt$.

5p **b)** Să se arate că $\int_0^1 f(x)dx+\int_1^3 g(x)dx=3$.

5p **c)** Să se demonstreze că, dacă $\alpha\in[1,3]$, atunci are loc inegalitatea $\int_0^1 f(x)dx+\int_1^{\alpha} g(x)dx\ge\alpha$.

Varianta 67

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Să se determine primul termen al progresiei geometrice cu termeni pozitivi b_1, 6, b_3, 24, ...

5p **2.** Să se determine $m \in \mathbb{R}$ astfel încât funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = (3 - m^2)x + 3$, să fie strict crescătoare.

5p **3.** Să se calculeze $\sin\frac{\pi}{3} + \sin\frac{2\pi}{3} + \sin\frac{3\pi}{3} + \sin\frac{4\pi}{3}$.

5p **4.** Se consideră mulțimea M a tuturor funcțiilor definite pe $A = \{1, 2, 3, 4\}$ cu valori în $B = \{5, 6, 7, 8, 9, 10\}$. Să se calculeze probabilitatea ca, alegând o funcție din mulțime M, aceasta să fie injectivă .

5p **5.** Se consideră punctul G, centrul de greutate a triunghiului ABC. Prin punctual G se duce paralela la AB care intersectează dreapta BC în punctul P. Să se determine $m \in \mathbb{R}$ astfel încât $\overrightarrow{GP} = m\overrightarrow{BA}$.

5p **6.** Să se calculeze $\cos 2\alpha$, dacă se cunoaşte $\cos\alpha = \frac{1}{3}$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Fie $m \in \mathbb{R}$, sistemul $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + my + z = 1 \\ x + my + mz = -2 \end{cases}$ şi matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 \\ 1 & m & m \end{pmatrix}$.

5p **a)** Să se calculeze $\det A$.

5p **b)** Să se demonstreze că rangul matricei A nu poate fi doi, pentru nicio valoare a lui m.

5p **c)** Să se determine valorile întregi ale lui m, pentru care sistemul are soluție cu componente întregi.

2. Fie permutările $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}, \gamma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, elemente ale grupului $(S_4, \cdot)$.

5p **a)** Să se verifice că γ este soluție a ecuației $\alpha x = x\beta$.

5p **b)** Să se demonstreze că α şi β au acelaşi ordin în grupul $(S_4, \cdot)$.

5p **c)** Să se arate că mulțimea soluțiilor ecuației $\alpha x = x\beta$ nu este o parte stabilă a grupului $(S_4, \cdot)$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră o funcție de două ori derivabilă $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$, astfel ca $f(0) = 0$ şi $f'(0) = 1$.

5p **a)** Să se arate că dacă $f'(x) \geq 1$ pentru orice $x \in [0, 1]$, atunci $f(x) \geq \frac{1}{2}$ pentru orice $x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$.

5p **b)** Să se arate că $\lim\limits_{x \to 0} \left(1 + f(x)\right)^{\frac{1}{x}} = e^{f'(0)}$.

5p **c)** Să demonstreze că, dacă $n \in \mathbb{N}^*$, atunci $\lim\limits_{x \to 0} \frac{f^n(x) - x^n}{x^{n+1}} = \frac{nf''(0)}{2}$.

2. Fie funcțiile $f : [0, 1] \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{1 + x}$ şi $g : [0, \infty) \to \mathbb{R}, g(x) = \int_0^x f(t)dt$.

5p **a)** Să se arate că $g(x) = \ln(1 + x)$.

5p **b)** Să se calculeze $\int_0^1 f^2(x) g(x) dx$.

5p **c)** Să se demonstreze că $f\left(\frac{1}{n}\right) + f\left(\frac{2}{n}\right) + f\left(\frac{3}{n}\right) + \ldots f\left(\frac{n}{n}\right) \leq n \ln 2, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Varianta 68

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Să se calculeze $\frac{25}{4+3i}+\frac{25}{4-3i}$.

5p **2.** Să se determine $m \in \mathbb{R}$ astfel încât funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=(m^2-2)x-3$ să fie strict descrescătoare.

5p **3.** Să se rezolve ecuația $\operatorname{arctg}\frac{x}{3}+\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\pi}{3}$.

5p **4.** Să se determine probabilitatea ca alegând un număr din mulțimea numerelor naturale pare de două cifre , acesta să fie divizibil cu 4.

5p **5.** Pe laturile AB şi AC ale triunghiului ABC se consideră punctele M şi respectiv N astfel încât $\overrightarrow{AM}=3\overrightarrow{MB}$ şi $\overrightarrow{AN}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$. Să se demonstreze că vectorii $\overrightarrow{MN}$ şi $\overrightarrow{BC}$ sunt coliniari .

5p **6.** Să se demonstreze că $\sin\frac{7\pi}{12}>\frac{7}{10}$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Fie $A\in M_3(\mathbb{C})$ şi $B=A-A^t$, unde A^t este transpusa matricei A.

5p **a)** Să se arate că $B+B^t=O_3$.

5p **b)** Să se demonstreze că $\det B=0$.

5p **c)** Să se demonstreze că, dacă $x,y\in\mathbb{C}$ şi matricea $xA+yA^t$ este inversabilă, atunci $x+y\neq 0$.

2. Se consideră ecuația $x^3+px+q=0$, $p,q\in\mathbb{R}$, şi x_1,x_2,x_3 soluțiile complexe ale acesteia.

5p **a)** Să se calculeze x_1,x_2,x_3, în cazul $p=1$, $q=0$.

5p **b)** Să se determine x_2 şi x_3, dacă $x_1=a+bi$ şi $a,b\in\mathbb{R}$, $b\neq 0$.

5p **c)** Să se arate că $12(x_1^7+x_2^7+x_3^7)=7(x_1^3+x_2^3+x_3^3)(x_1^2+x_2^2+x_3^2)^2$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră şirul $(x_n)_{n\geq 1}$, $x_n=1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{n}-\ln\left(n+\frac{1}{2}\right)$ şi funcția $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$,

$f(x)=\frac{1}{x+1}+\ln\frac{2x+1}{2x+3}$.

5p **a)** Să se calculeze $f'(x), x\in(0,\infty)$.

5p **b)** Să arate că $f(x)<0, \forall x\in(0,\infty)$.

5p **c)** Să demonstreze că şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ este strict descrescător.

2. Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\int_0^x e^{t^2}dt$.

5p **a)** Să se arate că funcția f este impară.

5p **b)** Să se calculeze $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$.

5p **c)** Să se arate că $\int_0^1 f(x)dx\leq e-2$.

Varianta 69

KRt

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Să se determine $z \in \mathbb{C}$ ştiind că $\frac{\overline{z}+7i}{z}=6$.

5p **2.** Să se arate că dreptele de ecuaţii $d_1: 2x-y+1=0$ şi $d_2: 2x+y-1=0$ sunt simetrice faţă de Oy.

5p **3.** Se consideră funcţia $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$, $f(x)=3x+1$. Să se demonstreze că funcţia f nu este inversabilă.

5p **4.** Să se calculeze probabilitatea ca, alegând o cifră x, aceasta să verifice inegalitatea $(x+1)!-x!\le 100$.

5p **5.** Se consideră triunghiul ABC şi punctele D, E, F astfel încât $\overrightarrow{BD}=2\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{AE}=3\overrightarrow{AD}$ şi $\overrightarrow{AF}=2\overrightarrow{CF}$. Să se demonstreze că patrulaterul $ABEF$ este paralelogram.

5p **6.** Să se calculeze $\cos\frac{7\pi}{12}$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Fie matricea $A=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

5p **a)** Să se verifice relaţia $A^3=A^2+A-I_3$.

5p **b)** Să se arate că $A^n-A^{n-2}=A^2-I_3, \forall n\in\mathbb{N}, n\ge 3$.

5p **c)** Să se arate că, pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$, suma elementelor matricei A^n este $n+3$.

2. Pentru fiecare $n\in\mathbb{N}^*$ se defineşte polinomul $P_n(X)=X^n-1\in\mathbb{C}[X]$.

5p **a)** Să se determine rădăcinile complexe ale polinomului $P_4(X)$.

5p **b)** Să se descompună polinomul $P_3(X)$ în factori ireductibili peste $\mathbb{C}$.

5p **c)** Să se descompună polinomul $P_{12}(X)$ în factori ireductibili peste $\mathbb{R}$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră şirul $(a_n)_{n\ge 1}$, $a_n=\frac{1}{\sqrt[3]{1}}+\frac{1}{\sqrt[3]{2}}+...+\frac{1}{\sqrt[3]{n}}$ şi funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}$.

5p **a)** Să se studieze derivabilitatea funcţiei f.

5p **b)** Să arate că, pentru orice $k\in(0,\infty)$, există $c\in(k,k+1)$ astfel încât $f(k+1)-f(k)=\frac{1}{\sqrt[3]{c}}$.

5p **c)** Să se demonstreze că şirul $(b_n)_{n\ge 1}$, definit prin $b_n=a_n-f(n), \forall n\ge 1$, este strict descrescător.

2. Fie funcţia $f:(-1,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\ln(1+x)$.

5p **a)** Să se calculeze $\int_0^1 f(x)dx$.

5p **b)** Să se calculeze $\lim\limits_{x\to 0}\frac{F(x)}{x^5}$, unde $F(x)=\int_0^x f(t)dt$, $x\in[0,+\infty)$.

5p **c)** Să se arate că $\int_0^1 \ln(1+x)dx\le\frac{5}{12}$.

Varianta 70

KRt

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Să se calculeze $z^{2008}+\bar{z}^{2008}$ ştiind că z este un număr complex astfel încât $|z|=1$ şi $z+\bar{z}=1$.

5p **2.** Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}^*\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{1}{x}$. Să se calculeze suma
$S=f(f(-10))+f(f(-9))+...+f(f(-1))+f(f(1))+...+f(f(9))+f(f(10))$.

5p **3.** Să se determine $m\in\mathbb{R}$ astfel încât funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases} x+1\ , & x\geq -1 \\ mx-3\ , & x<-1 \end{cases}$ să fie injectivă .

5p **4.** Să se determine rangul celui mai mare termen al dezvoltării $(4+3)^{200}$.

5p **5.** Să se determine $m\in\mathbb{R}$ ştiind că distanţa de la punctul $A(m, m+1)$ la dreapta $d:\ 3x-4y-1=0$ este 1.

5p **6.** Să se calculeze $\cos 75^\circ-\cos 15^\circ$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Pentru orice două matrice $A,B\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ se defineşte matricea $[A,B]=AB-BA$.

5p **a)** Să se arate că, pentru orice $A\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $[A,A^*]=O_2$, unde A^* este adjuncta matricei A.

5p **b)** Să se arate că, pentru orice $A,B,C\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $[A,[B,C]]+[B,[C,A]]+[C,[A,B]]=O_2$.

5p **c)** Să se arate că, pentru orice $A\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, ecuaţia $[A,X]=I_2$ nu are soluţie.

2. Se consideră grupul multiplicativ $(\mathbb{R}_+^*,\cdot)$ şi mulţimea de numere reale $H=(0,1)$.

5p **a)** Să se arate că relaţia $a\circ b=\frac{ab}{ab+(1-a)(1-b)}$ defineşte o lege de compoziţie pe H.

5p **b)** Să se arate că funcţia $f:\mathbb{R}_+^*\to(0,1)$, $f(x)=\frac{x}{x+1}$ are proprietatea $f(xy)=f(x)\circ f(y), \forall x,y>0$.

5p **c)** Să se rezolve în mulţimea $(H,\circ)$ ecuaţia $x\circ x\circ x=\frac{1}{2}$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se defineşte funcţia $f_0:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f_0(x)=e^{2x}$ şi, pentru fiecare $n\in\mathbb{N}^*$, se defineşte funcţia $f_n:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ prin $f_n(x)=f'_{n-1}(x)$.

5p **a)** Să se arate că $f_n(x)=2^n e^{2x}, \forall n\in\mathbb{N}$, $\forall x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Să determine asimptotele graficului funcţiei f_n.

5p **c)** Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{f_1(a)+f_2(a)+...+f_{n-1}(a)}{f_n(a)}$, unde a este un număr real.

2. Fie funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases} x\ln^2|x|, x\neq 0 \\ 0\quad , x=0 \end{cases}$.

5p **a)** Să se arate că funcţia f este integrabilă pe intervalul $[0,1]$.

5p **b)** Să se calculeze $\int_0^1 f(x)dx$.

5p **c)** Să se calculeze $\int_1^e f\left(\frac{1}{x}\right)dx$.

Varianta 71

KRt

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Să se calculeze $\log_2 2008 - \log_2 251 - 3$.

5p **2.** Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - \frac{1}{x^2}$. Să se arate că funcţia f este pară.

5p **3.** Să se arate că valoarea maximă a funcţiei $f:\left(0,\sqrt{2}\right) \to \mathbb{R}$, $f(x) = (3-2^x)^{\ln x}$ este $f(1)$.

5p **4.** Să se determine $n \in \mathbb{N}$ astfel încât $3C_n^1 + 2C_n^2 = 8$.

5p **5.** Se consideră triunghiul ABC şi punctele A', B', C' astfel încât $\overrightarrow{A'C} = 2\overrightarrow{BA'}$, $\overrightarrow{B'C} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{C'A} = 3\overrightarrow{BC'}$.
Să se arate că dreptele AA', BB' şi CC' sunt concurente.

5p **6.** Să se calculeze lungimea laturii BC a triunghiului ABC ştiind că $A(2,2)$ şi că ecuaţiile medianelor duse din B şi C sunt $2x + y - 2 = 0$, respectiv $x - y + 2 = 0$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră determinantul de ordin $n \geq 2$, $D_n = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 2 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 1 & 2 \end{vmatrix}$.

5p **a)** Să se calculeze $D_3 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$.

5p **b)** Să se verifice că $D_n = 2D_{n-1} - D_{n-2}, \forall n \geq 4$.

5p **c)** Să se arate că $D_n = n+1, \forall n \geq 2$.

2. Se consideră următoarea proprietate, pe care o poate avea un grup $(G,\cdot)$, notat multiplicativ şi având elementul neutru *e*: „(p) : pentru orice *x* din *G*, $x^2 = e$”.

5p **a)** Să se verifice că mulţimea $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$, împreună cu legea de compoziţie dată de formula $(a,b)\cdot(c,d) = (a+c,\, b+d), \forall a,b,c,d \in \mathbb{Z}_2$ este un grup care are proprietatea (p).

5p **b)** Folosind faptul că proprietatea (p) implică relaţia $(xy)^2 = x^2y^2, \forall x,y \in M$, să se demonstreze că dacă un grup are proprietatea (p), atunci el este comutativ.

5p **c)** Să se arate că nu există un grup cu 9 elemente, care să aibă proprietatea (p).

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcţia $f:(0,\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x - \ln(1+x)$.

5p **a)** Să se calculeze $f'(x), x \in (0,\infty)$.

5p **b)** Să arate că $f(x) > 0, \forall x \in (0,\infty)$.

5p **c)** Să se calculeze $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$.

2. Fie funcţia $F:[1,\infty) \to \mathbb{R}$, $F(x) = \int_1^2 t^x dx$.

5p **a)** Să se verifice că $1 + (x+1)F(x) = 2^{x+1}, \forall x \in [1,\infty)$.

5p **b)** Să se calculeze $\lim\limits_{x\to -1} F(x)$.

5p **c)** Să se arate că există o funcţie continuă $f:(-1,\infty) \to \mathbb{R}$, astfel încât $F(x) = \int_1^x f(y)dy, \forall x \in (-1,\infty)$.

Varianta 72

KRtm

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Să se arate că numărul $\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)^{2008}$ este real.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}^*\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^3-\frac{1}{x}$. Să se arate că funcția f este impară .

5p **3.** Să se determine mulțimea A, știind că relația $f:[-3,4]\to A$, $f(x)=x^2-3x$ definește o funcție surjectivă.

5p **4.** Să se calculeze $C_{2008}^0\cdot 5^{2008}-C_{2008}^1\cdot 5^{2007}\cdot 4+C_{2008}^3\cdot 5^{2005}\cdot 4^2-...+C_{2008}^{2008}\cdot 4^{2008}$.

5p **5.** Se consideră punctul $A(1,2)$ și dreapta de ecuație $d:\ 4x-2y+5=0$. Să se determine ecuația perpendicularei duse din punctul A pe dreapta d.

5p **6.** Să se calculeze $\sin 75^\circ\cdot\cos 15^\circ$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}\in M_3(\mathbb{R})$.

5p **a)** Să se rezolve ecuația $\det(I_3+xA^2)=0,\ x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Să se determine o matrice B cu proprietatea $B^2=A$.

5p **c)** Să se arate că: $\forall C\in M_3(\mathbb{R}),\ \forall x\in\mathbb{R},\ \det(C+xA)\det(C-xA)\le(\det C)^2$.

2. Se consideră $m\in\mathbb{R}$ și polinomul $P(X)=X^3-X+m$ cu rădăcinile $x_1,x_2,x_3\in\mathbb{C}$.

5p **a)** Să se determine x_1,x_2,x_3 în cazul $m=-6$.

5p **b)** Să se determine valorile parametrului m pentru care polinomul dat are toate rădăcinile întregi.

5p **c)** Să se determine $m\in\mathbb{R}$ astfel încât $x_1^5+x_2^5+x_3^5=10$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\setminus\{-1\}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x^2+x+1}{x+1}$.

5p **a)** Să se determine ecuația asimptotei spre $+\infty$ la graficul funcției f.

5p **b)** Să se calculeze $f'(x), x\in\mathbb{R}\setminus\{-1\}$.

5p **c)** Să se demonstreze că funcția f este concavă pe intervalul $(-\infty,-1)$.

2. Pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$ se consideră funcția $f_n:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f_n(x)=|\sin nx|$ și numărul $I_n=\int_{\pi}^{2\pi}\frac{f_n(x)}{x}dx$.

5p **a)** Să se arate că $I_n\le\ln 2$.

5p **b)** Să se arate că $I_n=\int_{n\pi}^{2n\pi}\frac{|\sin t|}{t}dt, \forall n\in\mathbb{N}^*$.

5p **c)** Să se arate că ariile subgraficelor restricțiilor funcțiilor f_n la intervalul $[0,\pi]$ nu depind de n.

Varianta 73

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Să se calculeze $|5-12i|-|12+5i|$.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-x^4$. Să se calculeze $(f\circ f\circ f\circ f)(1)$.

5p **3.** Să se rezolve ecuația $5^x+12^x=13^x$.

5p **4.** Să se determine probabilitatea ca, alegând un element al mulțimii $A=\{0,5,10,...,2005\}$, acesta să fie divizibil cu 25 .

5p **5.** Se consideră un triunghi *ABC*, cu lungimile laturilor $AB=c, AC=b$ și un punct *D* astfel încât $\overrightarrow{AD}=b\overrightarrow{AB}+c\overrightarrow{AC}$. Să se arate că semidreapta [*AD* este bisectoarea unghiului BAC.

5p **6.** Fie $\alpha\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$, astfel încât $\cos 2\alpha=\frac{1}{2}$. Să se calculeze $\cos\alpha$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Dându-se matricea $M=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix}\in M_2(\mathbb{R})$, se asociază fiecărui punct $A(x,y)$ punctul $A_M(x',y')$, unde $\begin{pmatrix} x' \\ y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y\end{pmatrix}$.

5p **a)** Să se determine coordonatele lui A_M, dacă $a=1, b=2, c=3, d=4$ și $A(-1,1)$.

5p **b)** Să se arate că, în cazul $a=1, b=2, c=2, d=4$, toate punctele A_M se află pe dreapta $y=2x$.

5p **c)** Să se arate că, dacă se notează cu S și S_M ariile triunghiurilor ABC, respectiv $A_MB_MC_M$, atunci $S_M=S\cdot|\det M|$.

2. Se consideră mulțimea $A=\left\{\begin{pmatrix} a & b & c \\ \hat{0} & a & d \\ \hat{0} & \hat{0} & a\end{pmatrix} \mid a,b,c,d\in\mathbb{Z}_2\right\}$.

5p **a)** Să se determine numărul elementelor mulțimii A.

5p **b)** Să se arate că $(A,+,\cdot)$ este un inel, unde „ + ” și „ $\cdot$ ” sunt operațiile de adunare și de înmulțire ale matricelor.

5p **c)** Să se arate că acest inel are exact 8 elemente inversabile.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcțiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\operatorname{arctg} x$ și $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, g(x)=\frac{x}{1+x^2}$.

5p **a)** Să se calculeze $\lim\limits_{x\to\infty}\left(f(x)g(x)\right)$.

5p **b)** Să se scrie ecuația tangentei la graficul funcției $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $h(x)=g(x)-f(x)$ în punctul $(1, h(1))$.

5p **c)** Să se arate că $f(x)>g(x), \forall x\in(0,\infty)$.

2. Se consideră funcția $f_0:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f_0(x)=1$ și, pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$, se definește funcția $f_n:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f_n(x)=\int_0^x f_{n-1}(t)dt$.

5p **a)** Să determine funcția f_2.

5p **b)** Să se calculeze $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{xf_n(x)+1}{f_{n+1}(x)+2}$.

5p **c)** Să se calculeze volumul corpului obținut prin rotirea graficului funcției $g:[0,\pi]\to[0,\pi]$, $g(x)=f_1(x)\sin x$ în jurul axei Ox.

Varianta 74

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Să se rezolve în $\mathbb{C}$ ecuația $z^4+3z^2-4=0$.

5p **2.** Se consideră funcția $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\left(m^2-1\right)x-2m+2$. Să se determine $m\in\mathbb{R}$ astfel încât graficul funcției să nu intersecteze axa Ox.

5p **3.** Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația $\sqrt{2-x}-\sqrt[3]{x-2}=0$.

5p **4.** Se consideră dezvoltarea $(2^x-1)^5$. Să se determine x astfel încât suma dintre termenii al treilea şi al patrulea să fie egală cu $20\cdot 2^x$.

5p **5.** Să se determine $m\in\mathbb{R}$ astfel încât punctele $A(3,3)$, $B(2,4)$ şi $C(2m,1-m)$ să fie coliniare.

5p **6.** Fie $\alpha\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$, astfel încât $\cos 2\alpha=-\frac{1}{2}$. Să se calculeze $\sin\alpha$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix}0 & 1 & -1\\ -1 & 0 & 2\\ 1 & -2 & 0\end{pmatrix}$.

5p **a)** Să se determine rangul matricei A.

5p **b)** Să se verifice relația $A^2(A+6I_3)=O_3$.

5p **c)** Să se arate că $\det(I_3+xA^2)\geq 0,\ \forall x\in\mathbb{R}$.

2. Se consideră $a,b\in\mathbb{R}$ şi polinomul $p(X)=X^3+aX^2+X+b$, cu rădăcinile $x_1,x_2,x_3\in\mathbb{C}$.

5p **a)** Să se afle rădăcinile polinomului p în cazul $a=b=1$.

5p **b)** Să se afle a şi b ştiind că polinomul p are rădăcina dublă 1.

5p **c)** Să se arate că, oricare ar fi $a,b\in\mathbb{R}$, $(x_1-x_2)^4+(x_1-x_3)^4+(x_2-x_3)^4=2(a^2-3)^2$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:(-2,2)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\ln\frac{2+x}{2-x}$.

5p **a)** Să se determine ecuațiile asimptotelor la graficul funcției f.

5p **b)** Să se studieze monotonia funcției f.

5p **c)** Să se calculeze $\lim\limits_{x\to\infty} xf\left(\frac{1}{x}\right)$.

2. Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(t)=\int_1^2\left(\frac{t}{x}-e^x\right)^2 dx$ şi numerele $A=\int_1^2\frac{1}{x^2}dx$, $B=\int_1^2\frac{e^x}{x}dx$.

5p **a)** Să se calculeze $A\int_1^2 e^{2x}dx$.

5p **b)** Să se arate că $f(2B-t)=f(2B+t),\forall t\in\mathbb{R}$.

5p **c)** Să se demonstreze că $\left(\int_1^2\frac{e^x}{x}dx\right)^2\leq\left(\int_1^2 e^{2x}dx\right)\left(\int_1^2\frac{1}{x^2}dx\right)$.

Varianta 75

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Să se determine $x, y \in \mathbb{R}$ ştiind că $x(1+2i)+y(2-i)=4+3i$.

5p **2.** Să se determine $m \in \mathbb{R}$, astfel încât punctul $A(m-1,\ m^2-3m)$ să se afle în cadranul II.

5p **3.** Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuaţia $\log_3(\log_4(x^2-17))=1$.

5p **4.** Se consideră $n \in \mathbb{N}^*$ şi dezvoltarea $\left(2\sqrt{x}+\frac{3}{x}\right)^n, x>0$. Să se determine termenul independent de x, ştiind că suma ultimilor trei coeficienţi binomiali este egală cu 16.

5p **5.** Fie punctele $A(4,-2)$, $B(2,4)$ şi $C(m,n)$. Să se determine $m,n \in \mathbb{R}$ astfel încât punctul C să fie centrul cercului circumscris triunghiului AOB.

5p **6.** Fie triunghiul ABC dreptunghic în A cu $AB=5$ şi $BC=13$. Să se calculeze lungimea segmentului BM, unde M este mijlocul segmentului AC.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}2 & -1 & -1\\ -1 & 2 & -1\\ -1 & -1 & 2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$ şi $M_x=\frac{x}{3}A+\frac{1}{3x^2}B,\ x\in\mathbb{R}^*$.

5p **a)** Să se verifice că $(A+B)^n=A^n+B^n, \forall n\in\mathbb{N}^*$.

5p **b)** Să se arate că $M_xM_y=M_{xy}$, $\forall x,y\in\mathbb{R}^*$.

5p **c)** Să se arate că, pentru orice x real nenul, matricea M_x este nesingulară.

2. Se consideră $a\in\mathbb{R}$ şi polinomul $p(X)=X^4-aX^3-aX+1$, cu rădăcinile x_1,x_2,x_3,x_4.

5p **a)** Să se verifice că $x_1+x_2+x_3+x_4=\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}+\frac{1}{x_4}$.

5p **b)** Să se arate că polinomul p nu este divizibil cu X^2-1 pentru nicio valoare a lui a.

5p **c)** Să se arate că, dacă $|a|<1$, atunci toate rădăcinile polinomului p au modulul 1.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră $\alpha\in\mathbb{R}, \alpha>1$ şi funcţia $f:(-1,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=(1+x)^\alpha-\alpha x$.

5p **a)** Să se studieze monotonia funcţiei f.

5p **b)** Să se demonstreze că $(1+x)^\alpha>1+\alpha x, \forall x\in(-1,\infty)\setminus\{0\}, \forall\alpha\in(1,\infty)$.

5p **c)** Să se demonstreze că $2f(x+y)\le f(2x)+f(2y), \forall x,y\in[0,\infty)$.

2. Fie funcţia $f:(-1,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x}{1+x}$.

5p **a)** Să se calculeze $\int_0^1 f(x)dx$.

5p **b)** Să se calculeze $\int_1^4 f^2(x)[x]dx$, unde $[x]$ reprezintă partea întreagă a numărului real x.

5p **c)** Să se arate că şirul $(a_n)_{n\ge1}$, dat de $a_n=f(1)+f(2)+f(3)+\ldots+f(n)-\int_0^n f(x)dx$, este convergent.

Varianta 76

KRt

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Să se verifice dacă numărul $\sqrt{3-2\sqrt{2}}$ aparține mulțimii $\{a+b\sqrt{2} \mid a,b\in\mathbb{Z}\}$

5p **2.** Se consideră ecuația $x^2-3x+1=0$, cu rădăcinile x_1 şi x_2. Să se arate că $x_1^2+x_2^2\in\mathbb{N}$.

5p **3.** Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația $\text{arctg}\sqrt{3}+\text{arctg}\,x=\frac{\pi}{2}$.

5p **4.** Să se arate că oricare ar fi n natural, $n\geq 1$, are loc egalitatea $C_{2n}^{n}=2\cdot C_{2n-1}^{n}$.

5p **5.** Se consideră vectorii $\vec{u}=\vec{i}-\vec{j}$ şi $\vec{v}=2\vec{i}+4\vec{j}$. Să se calculeze modulul vectorului $\vec{u}+\vec{v}$.

5p **6.** Fie $\alpha\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$, astfel încât $\sin\alpha=\frac{3}{5}$. Să se calculeze $\text{tg}\frac{\alpha}{2}$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Fie $a,b,c\in\mathbb{R}$, matricea $A=\begin{pmatrix}1+a^2 & ab & ac\\ ba & 1+b^2 & bc\\ ca & cb & 1+c^2\end{pmatrix}$ şi A^* adjuncta sa.

5p **a)** Să se calculeze determinantul matricei A.

5p **b)** Să se verifice că $\det(A^*)=(\det A)^2$.

5p **c)** Să se demonstreze că dacă $A^*=A$, atunci $A=I_3$.

2. Fie $(G,\cdot)$ un grup. Pentru fiecare element $a\in G$ se defineşte funcția $f_a:G\to G,\ f_a(x)=ax, \forall x\in G.$

5p **a)** Să se arate că f_a este bijectivă, pentru orice $a\in G$.

5p **b)** Fie $\mathcal{F}(G)=\{f_a:G\to G \mid a\in G\}$. Să se arate că $\mathcal{F}(G)$ împreună cu operația de compunere a funcțiilor formează un grup.

5p **c)** Să se arate că grupurile $(G,\cdot)$ şi $(\mathcal{F}(G),\circ)$, unde $\mathrm{F}(G)=\{f_a:G\to G \mid a\in G\}$, sunt izomorfe.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2-x+1}.$

5p **a)** Să se arate că graficul funcției f admite asimptotă orizontală spre ∞.

5p **b)** Să se studieze monotonia funcției f.

5p **c)** Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{f(1)+f(2)+...+f(n)}{n}\right)^n$.

2. Fie $I_n=\int_0^1 x^n\sqrt{1-x^2}\,dx,$ unde $n\in\mathbb{N}^*$.

5p **a)** Să se calculeze I_1.

5p **b)** Să se arate că $(n+2)I_n=(n-1)I_{n-2}$ pentru orice $n\in\mathbb{N},\ n\geq 3.$

5p **c)** Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}I_n$.

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Se consideră progresia aritmetică de rație 2 cu $a_3 + a_4 = 8$. Să se determine a_1.

5p **2.** Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=1+x$. Să se calculeze $f(-1)+f(-2)+f(-3)+\ldots+f(-10)$.

5p **3.** Să se rezolve ecuația $4^x - 2^x = 56$.

5p **4.** Să se calculeze $A_4^3 - A_3^2 - C_4^2$.

5p **5.** Fie ABC un triunghi și G centrul său de greutate. Se consideră punctul M definit prin $\overrightarrow{MB} = -2\overrightarrow{MC}$. Să se arate că dreptele GM și AC sunt paralele.

5p **6.** Fie $\alpha \in \left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, astfel încât $\sin\alpha = \frac{3}{4}$. Să se calculeze $\operatorname{tg}\alpha$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră sistemul de ecuații liniare $\begin{cases} x - y - mz = 1 \\ mx + y + mz = 1 - m \\ mx + 3y + 3z = -1 \end{cases}$, unde $m \in \mathbb{R}$.

5p **a)** Să se calculeze determinatul matricei sistemului.

5p **b)** Să se arate că, pentru orice $m \in \mathbb{R}$, matricea sistemului are rangul cel puțin egal cu 2.

5p **c)** Să se determine $m \in \mathbb{R}$ pentru care sistemul este incompatibil.

2. Se consideră $\alpha > 0$ un număr real și mulțimea $G_\alpha = (\alpha, \infty)$. Pe $\mathbb{R}$ se definește legea de compoziție $(x,y) \to x * y = 3xy - 6(x+y) + 7\alpha, \forall x, y \in \mathbb{R}$.

5p **a)** Să se arate că pentru $\alpha = 2$, cuplul $(G_2, *)$ este grup abelian.

5p **b)** Să se arate că grupurile $(G_2, *)$ și $(\mathbb{R}_+^*, \cdot)$ sunt izomorfe, prin funcția $f: G_2 \to \mathbb{R}_+^*, f(x) = 3x - 6$.

5p **c)** Să se determine valorile lui α pentru care G_α este parte stabilă a lui $\mathbb{R}$ în raport cu operația „$*$”.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=\ln x$.

5p **a)** Să se scrie ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x = e$.

5p **b)** Să se arate că $\frac{1}{k+1} < f(k+1) - f(k) < \frac{1}{k}$, pentru orice $k \geq 1$.

5p **c)** Să se arate că şirul. $(x_n)_{n\geq 1}$ definit prin $x_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} - \ln n$ este convergent.

2. Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{3+\cos x}$.

5p **a)** Să se determine o primitivă a restricției funcției f la intervalul $[0,\pi]$.

5p **b)** Să se demonstreze că orice primitivă a funcției f este strict crescătoare.

5p **c)** Să se calculeze $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x^2}\int_0^x f(t)\,dt$.

Varianta 78

KRt

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Să se calculeze $10^{\lg 7} - \sqrt[3]{343}$.

5p **2.** Să se rezolve în $\mathbb{R}$ inecuația $2x^2 - 3x + 1 \le 0$.

5p **3.** Să se arate că funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \log_3 2^x - x$ este injectivă.

5p **4.** Să se calculeze numărul diagonalelor unui poligon convex cu 8 laturi.

5p **5.** Fie $ABCD$ un paralelogram şi P un punct astfel ca $\overrightarrow{BP} = 2\overrightarrow{PD}$. Să se arate că $\overrightarrow{BP} = \frac{2}{3}\left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}\right)$.

5p **6.** Fie $a, b \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, astfel încât $a + b = \frac{\pi}{4}$. Să se arate că $\operatorname{tg} a \operatorname{tg} b + \operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b = 1$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră sistemul de ecuații liniare $\begin{cases} 2x - 3y + 4z - 5t = -1 \\ x + 9y + mz + t = 3 \\ 5x - 6y + 10z + nt = p \end{cases}$, unde $m, n, p \in \mathbb{R}$.

5p **a)** Să se determine p astfel încât sistemul să admită o soluție (x_0, y_0, z_0, t_0) cu $z_0 = t_0 = 0$.

5p **b)** Să se arate că, pentru orice $m, n \in \mathbb{R}$, rangul matricei sistemului este mai mare sau egal cu 2.

5p **c)** Să se determine $m, n, p \in \mathbb{R}$ pentru care sistemul este compatibil, iar matricea sistemului are rangul 2.

2. Fie mulțimea $Q_0 = \left\{ \frac{m}{n} \mid m, n \in \mathbb{Z},\ m, n \text{ impare} \right\}$ şi $G = Q_0 \times \mathbb{Z}$. Pe G se defineşte legea de compoziție: $(q_1, k_1) * (q_2, k_2) = (q_1 q_2, k_1 + k_2),\ \forall q_1, q_2 \in Q_0, \forall k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$.

5p **a)** Să se calculeze $(1,1) * (1,2) * \ldots * (1,2008)$.

5p **b)** Să se arate că $(G, *)$ este grup abelian.

5p **c)** Să se arate că funcția $f : G \to \mathbb{Q}^*,\ f(q,k) = q 2^k$ este un izomorfism între grupurile $(G, *)$ şi $(\mathbb{Q}^*, \cdot)$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \sqrt[3]{x^3 - 3x + 2}$.

5p **a)** Să se arate că graficul funcției f admite asimptotă spre $+\infty$

5p **b)** Să se determine punctele de extrem local ale funcției f.

5p **c)** Să se calculeze $\lim\limits_{x \to \infty} x(2 \operatorname{arctg} f(x) - \pi)$.

2. Fie $I_n = \int_1^2 ((x-1)(2-x))^n dx, n \in \mathbb{N}^*$.

5p **a)** Să se calculeze I_1.

5p **b)** Să se arate că $2(2n+1)I_n = nI_{n-1}$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$, $n \ge 2$.

5p **c)** Să se calculeze $\lim\limits_{n \to \infty} I_n$.

Varianta 79

KRtm

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Să se arate că $\left(-\infty,\sqrt{2}\right)\cap\left(\log_2 3,\infty\right)=\varnothing$.

5p **2.** Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x^2-4x+3$. Să se determine punctele de intersecţie ale graficului funcţiei *f* cu axa Ox.

5p **3.** Să se rezolve ecuaţia $\sqrt{x}+\sqrt{1-x}=1$.

5p **4.** Să se determine suma termenilor raţionali ai dezvoltării $\left(1+\sqrt{2}\right)^5$.

5p **5.** Să se calculeze lungimea înălţimii duse din A a triunghiului cu vârfurile în punctele $A(1,2)$, $B(-1,3)$ şi $C(0,4)$.

5p **6.** Fie $x\in\mathbb{R}$, astfel încât $\operatorname{tg}^2 x=6$. Să se calculeze $\cos^2 x$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră sistemul de ecuaţii liniare $\begin{cases} x+ & my+ & 2z=1 \\ x+(2m-1)y+ & & 3z=1 \\ x+ & my+(m-3)z=2m-1 \end{cases}$, unde $m\in\mathbb{R}$.

5p **a)** Să se determine $m\in\mathbb{R}$ pentru care sistemul are soluţie unică.

5p **b)** Să se determine $m\in\mathbb{R}$ pentru care sistemul este compatibil nedeterminat.

5p **c)** Pentru $m=1$ să se determine soluţiile reale (x_0,y_0,z_0) ale sistemului pentru care $2x_0^2-y_0^2+3z_0^2=14$.

2. Pe mulţimea $G=[0,1)$ se defineşte legea de compoziţie $x*y=\{x+y\}$, unde $\{a\}$ este partea fracţionară a numărului real a.

5p **a)** Să se calculeze $\frac{2}{3}*\frac{3}{4}$.

5p **b)** Să se arate că $(G,*)$ este grup abelian.

5p **c)** Să se arate că, pentru orice $n\in\mathbb{N}, n\geq 2$, mulţimea $H_n=\left\{0,\frac{1}{n},\frac{2}{n},\ldots,\frac{n-1}{n}\right\}$ este un subgrup al lui G.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^{3x}+2x+1$.

5p **a)** Să se scrie ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul de abscisă $x=0$.

5p **b)** Să se arate că funcţia f este inversabilă.

5p **c)** Să se calculeze derivata funcţiei inverse, f^{-1}, în punctul 2.

2. Se consideră şirul $(a_n)_{n\geq 0}$ definit prin $a_0=1$ şi $a_{n+1}=\int_0^{a_n}\sin\pi x\,dx$.

5p **a)** Să se calculeze a_1.

5p **b)** Să se arate că şirul $(a_n)_{n\geq 0}$ este convergent.

5p **c)** Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

Varianta 80

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Să se calculeze $(1-i)(1-i^2)(1-i^3)\dots(1-i^{2008})$.

5p **2.** Se consideră funcţiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=1-x$ şi $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ g(x)=2x-1$. Să se arate că funcţia $f\circ g$ este descrescătoare.

5p **3.** Să se rezolve în $\mathbb{R}$ inecuaţia $\sqrt[3]{2-x^2}\geq 1$.

5p **4.** Într-o urnă sunt 8 bile, dintre care 4 albe şi 4 roşii. Se extrage pe rând câte o bilă din urnă. Să se calculeze probabilitatea ca primele două bile extrase să fie albe.

5p **5.** Se consideră dreptele d_1 şi d_2 având ecuaţiile $x-2y+1=0$, respectiv $x+y-3=0$. Să se determine ecuaţia paralelei la d_1 dusă prin punctul $P\in d_2$, ştiind că abscisa punctului P este 4.

5p **6.** Fie $x\in\mathbb{R}$ astfel încât $\sin x=\frac{1}{2}+\cos x$. Să se calculeze $\sin 2x$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Fie permutarea $\sigma=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\2&3&4&5&1\end{pmatrix}\in S_5$.

5p **a)** Să se determine mulţimea $A=\left\{\sigma^n \,\middle|\, n\in\mathbb{N}^*\right\}$.

5p **b)** Să se arate că toate elementele mulţimii A sunt permutări pare.

5p **c)** Să se găsească permutarea $\tau\in S_5$ astfel încât suma $\alpha=\sum_{k=1}^{5}\sigma(k)\tau(k)$ să ia valoarea maximă.

2. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ o funcţie şi mulţimea $H=\{T\in\mathbb{R}\mid f(x+T)=f(x),\ \forall x\in\mathbb{R}\}$.

5p **a)** Să se arate că, dacă $T\in H$, atunci $-T\in H$.

5p **b)** Să se demonstreze că H este subgrup al grupului $(\mathbb{R},+)$.

5p **c)** Să se determine H pentru funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases}1, & x\in\mathbb{Q}\\0, & x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\end{cases}$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\sqrt{x^2+1}$.

5p **a)** Să se studieze monotonia functiei f.

5p **b)** Să se arate că $(x^2+1)f''(x)+xf'(x)=\sqrt{x^2+1}$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$.

5p **c)** Să se arate că graficul funcţiei f admite asimptotă spre $-\infty$.

2. Fie $I_n=\int_0^1\frac{nx^n}{x^n+1}dx,\ n\in\mathbb{N}^*$.

5p **a)** Să se calculeze I_1.

5p **b)** Să se arate că $I_n=\ln 2-\int_0^1\ln(1+x^n)dx,\ \forall n\in\mathbb{N}^*$.

5p **c)** Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}I_n$.

Varianta 81

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Să se calculeze partea întreagă a numărului $\log_2 500$.

5p **2.** Se consideră ecuația $x^2 - 2x + m = 0,\ m \in \mathbb{R},$ care are rădăcinile reale x_1 şi x_2. Ştiind că $|x_1 - x_2| = 1,$ să se determine m.

5p **3.** Să se rezolve ecuația $\sqrt{x} + \sqrt[3]{1-x} = 1$.

5p **4.** Să se calculeze $C_{16}^0 + C_{16}^2 + C_{16}^4 + \ldots + C_{16}^{16}$.

5p **5.** Dreptele de ecuații $x + y = 1$ şi $3x - ay = 2,\ a \in \mathbb{R}$ sunt paralele. Să se determine valoarea lui a.

5p **6.** Fie $a, b \in \mathbb{R}$, astfel încât $a + b = \frac{\pi}{2}$. Să se arate că $\sin 2a + \sin 2b = 2\cos(a-b)$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră sistemul de ecuații liniare cu coeficienți în $\mathbb{Z}_7$ $\begin{cases} \hat{2}x + my + \hat{3}z = \hat{4} \\ x + \hat{3}y + \hat{2}z = \hat{3} \\ x + \hat{3}y + z = \hat{1} \end{cases}$.

5p **a)** Să se calculeze determinantul matricei sistemului.

5p **b)** Să se arate că pentru orice $m \in \mathbb{Z}_7$ sistemul admite soluția $x = \hat{6},\ y = \hat{0},\ z = \hat{2}$.

5p **c)** Să se determine valorile lui $m \in \mathbb{Z}_7$ pentru care sistemul are cel puțin două soluții.

2. Fie $a > 0$ un număr real şi $G = \left\{ f_r : (a, \infty) \to (a, \infty),\ f_r(x) = a + (x-a)^r \mid r \in \mathbb{Q}^* \right\}$.

5p **a)** Să se demonstreze că $f_r \circ f_q \in G,\ \forall r, q \in \mathbb{Q}^*$.

5p **b)** Să se arate că G, împreună cu operația de compunere a funcțiilor, este grup abelian.

5p **c)** Să se arate că grupurile $(G, \circ)$ şi $(\mathbb{Q}^*, \cdot)$ sunt izomorfe.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R},\ f(x) = (x-1)e^{-\frac{1}{x}}$.

5p **a)** Să se scrie ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x = 1$.

5p **b)** Să se arate că funcția admite două puncte de extrem.

5p **c)** Să se determine ecuația asimptotei la graficul funcției f spre $+\infty$.

2. Pentru fiecare $n \in \mathbb{N}^*$ se consideră funcția $f_n : [0; \infty) \to \mathbb{R},\ f_n(x) = \int_0^x t^n \sqrt{t^2 + 1}\,dt$.

5p **a)** Să se calculeze $f_1(1)$.

5p **b)** Să se arate că f_n este strict crescătoare pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.

5p **c)** Să se calculeze $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{f_n(x)}{x^{n+2}}$.

Varianta 82

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Să se verifice dacă numărul $1+i$ este rădăcină a ecuației $z^4+4=0$.

5p **2.** Se consideră o funcție f de gradul al doilea. Ştiind că $f(-1)=3$ şi că vârful parabolei asociate funcției f este $V(1,2)$, să se calculeze $f(5)$.

5p **3.** Să se justifice de ce, dacă $f:\{1,2,3\}\to\{4,5,6\}$ este o funcție injectivă, atunci $f(1)+f(2)+f(3)=15$.

5p **4.** Fie M mulțimea numerelor naturale de două cifre. Să se calculeze probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea M, acesta să aibă ambele cifre impare.

5p **5.** Se consideră punctele $A(1,0), B(2,3)$ şi $C(-1,4)$. Să se calculeze $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$.

5p **6.** Fie $a\in\mathbb{R}$, astfel încât $\sin a=\frac{1}{4}$. Să se calculeze $\sin 3a$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră sistemul de ecuații liniare cu coeficienți reali $\begin{cases} x+ay+(b+c)z=0 \\ x+by+(c+a)z=0 \\ x+cy+(a+b)z=0 \end{cases}$.

5p **a)** Să se arate că, pentru orice $a,b,c\in\mathbb{R}.$, sistemul admite soluții nenule.

5p **b)** Fie $(x_0,y_0,z_0)\in\mathbb{R}^3$ o soluție oarecare a sistemului. Să se demonstreze că dacă cel puțin două dintre numerele a,b,c sunt diferite, atunci cel puțin două dintre numerele x_0,y_0,z_0 sunt egale.

5p **c)** Să se rezolve sistemul, ştiind că $a\neq b$ şi $(1,1,1)$ este soluție a sistemului.

2. Se consideră mulțimea $G=\left\{\begin{pmatrix} x & 0 & iy \\ 0 & 0 & 0 \\ iy & 0 & x \end{pmatrix}\middle| x,y\in\mathbb{R}, x^2+y^2\neq 0\right\}$.

5p **a)** Să se demonstreze că G este parte stabilă a lui $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ în raport cu înmulțirea matricelor.

5p **b)** Să se arate că $(G,\cdot)$ este grup abelian.

5p **c)** Să se demonstreze că grupurile $(G,\cdot)$ şi $(\mathbb{C}^*,\cdot)$ sunt izomorfe.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră şirul $(a_n)_{n\ge 0}$, definit prin $a_0=\sqrt{3}$, $a_{n+1}=\sqrt{2+a_n}$, $\forall n\in\mathbb{N}$.

5p **a)** Să se arate că $(a_n)_{n\ge0}$ este strict crescător.

5p **b)** Să se arate că şirul $(a_n)_{n\ge0}$ este convergent.

5p **c)** Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} 4^n(2-a_n)$.

2. Fie funcția $f:\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\to(0,\infty)$, $f(x)=\int_0^x \frac{(\sin t+\cos t)\sin t}{\cos^2 t}dt$.

5p **a)** Să se calculeze $f\left(\frac{\pi}{4}\right)$.

5p **b)** Să se arate că f este strict crescătoare.

5p **c)** Să se calculze $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\frac{f(x)}{x^2}$.

Varianta 83

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Să se arate că numărul $\sqrt[3]{3}$ aparține intervalului $\left(\sqrt{2}, \log_2 5\right)$.

5p **2.** Să se afle valorile reale ale lui m știind că $x^2+3x+m\geq 0$, oricare ar fi $x\in\mathbb{R}$.

5p **3.** Să se determine numărul de soluții din intervalul $[0,4\pi]$ ale ecuației $\cos 2x=\frac{1}{3}$.

5p **4.** Într-o urnă sunt 49 de bile inscripționate cu numerele de la 1 la 49. Se extrag din urnă două bile. Să se calculeze probabilitatea ca pe ambele bile extrase să fie scrise numere pare.

5p **5.** Se consideră vectorii $\vec{u}=2\vec{i}-3\vec{j}$ și $\vec{v}=m\vec{i}+4\vec{j}$, $m\in\mathbb{R}$. Să se determine m știind că vectorii sunt perpendiculari.

5p **6.** Să se calculeze produsul $P=\operatorname{tg}1^\circ\cdot\operatorname{tg}2^\circ\cdot\operatorname{tg}3^\circ\cdot\ldots\cdot\operatorname{tg}89^\circ$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Fie sistemul de ecuații liniare $\begin{cases} x-y+z=1 \\ x+(m^2-m-1)y+(m+1)z=2 \\ 2x+(m^2-m-2)y+2(m+1)z=3 \end{cases}$, unde $m\in\mathbb{R}$.

5p **a)** Să se demonstreze că sistemul are soluție unică dacă și numai dacă $m\in\mathbb{R}\setminus\{0,1\}$.

5p **b)** Să se arate că pentru $m\in\{0,1\}$ sistemul este incompatibil.

5p **c)** Să se arate că dacă $(x_0,y_0,z_0)\in\mathbb{R}^3$ este soluție a sistemului, atunci $x_0-y_0+2008\cdot z_0=1$.

2. Se consideră mulțimile $H=\{a^2\mid a\in\mathbb{Z}_7\}$ și $G=\left\{\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a\end{pmatrix} \mid a,b\in\mathbb{Z}_7, a\neq\hat{0} \text{ sau } b\neq\hat{0}\right\}$.

5p **a)** Să se determine numărul de elemente ale mulțimii H.

5p **b)** Fie $x,y\in H$ astfel încât $x+y=\hat{0}$. Să se arate că $x=y=\hat{0}$.

5p **c)** Să se arate că G este grup abelian în raport cu operația de înmulțire a matricelor.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\setminus\{1\}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x\sqrt{\left|\frac{x+1}{x-1}\right|}$.

5p **a)** Să se arate că graficul funcției f admite asimptotă spre $+\infty$.

5p **b)** Să se studieze derivabilitatea funcției f.

5p **c)** Să se precizeze punctele de extrem ale funcției f.

2. Se consideră $n\in\mathbb{N}^*$, funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{1}{\cos^{2n}x+\sin^{2n}x}$ și $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ o primitivă a sa.

5p **a)** Să se arate că, pentru $n=2$, $F''(x)=f^2(x)\sin 4x, \forall x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Să se arate că $|F(b)-F(a)|\geq|b-a|, \forall a,b\in\mathbb{R}$.

5p **c)** Să se arate că $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n}x f(x)dx=\frac{\pi}{4}$.

Varianta 84

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Fie $z\in\mathbb{C}$. Să se arate că dacă $2z+3\overline{z}\in\mathbb{R}$, atunci $z\in\mathbb{R}$.

5p **2.** Să se determine funcția de gradul al doilea al cărei grafic conține punctele $(0,4),(1,-2)$ şi $(-1,1)$.

5p **3.** Se consideră o funcție bijectivă $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ cu $f(1)=2$ şi $f(f(1))=4$. Să se calculeze $f^{-1}(4)$.

5p **4.** Să se determine numerele naturale n astfel încât $C_n^2=C_n^8$.

5p **5.** Se consideră punctele A,B,C,D astfel încât $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$. Să se arate că $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{DB}=\vec{0}$.

5p **6.** Fie $a,b\in\mathbb{R}$, astfel încât $a-b=\pi$. Să se arate că are loc relația $\cos a\cdot\cos b\le 0$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră sistemul de ecuații liniare $\begin{cases} x+2y-3z=3 \\ 2x-y+z=m \\ nx+y-2z=4 \end{cases}$, unde $m,n\in\mathbb{R}$.

5p **a)** Să se determine m şi n pentru care sistemul admite soluția $x_0=2,\ y_0=2,\ z_0=1$.

5p **b)** Să se afle valorile lui $n\in\mathbb{R}$ pentru care sistemul are soluție unică.

5p **c)** Să se determine valorile lui m şi n pentru care sistemul este compatibil nedeterminat.

2. Fie $p\ge 3$, un număr prim şi $G=\left\{\begin{pmatrix}\hat{1} & a & b\\ \hat{0} & \hat{1} & \hat{0}\\ \hat{0} & \hat{0} & \hat{1}\end{pmatrix}\middle|\, a,b\in\mathbb{Z}_p\right\}$.

5p **a)** Să se determine numărul de elemente al mulțimii G.

5p **b)** Să se arate că G este grup în raport cu operația de înmulțire a matricelor din $\mathcal{M}_3(\mathbb{Z}_p)$.

5p **c)** Să se arate că orice element al grupului $(G,\cdot)$, diferit de elementul neutru, are ordinul p.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}^*\to\mathbb{R}, f(x)=\dfrac{e^x}{x}$.

5p **a)** Să se studieze monotonia funcției f.

5p **b)** Să se determine asimptotele graficului funcției f.

5p **c)** Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} n^2\left(f(n)-f(n+1)\right)$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\int_0^x e^{-t}(t^2-3t+2)dt$.

5p **a)** Să se arate că $f(1)>0$.

5p **b)** Să se arate că funcția f admite două puncte de extrem.

5p **c)** Să se calculeze $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)+f(-x)}{x^2}$.

Varianta 85

KRtm

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Fie $z \in \mathbb{C}$. Să se arate că $i\left(z - \bar{z}\right) \in \mathbb{R}$.

5p **2.** Fie funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + (m+1)x + m$, unde $m \in \mathbb{R}$. Să se determine m pentru care parabola asociată funcţiei f este tangentă la axa Ox.

5p **3.** Să se rezolve ecuaţia $\sqrt{x+1} + \sqrt{2x+1} = 2$.

5p **4.** Termenul din mijloc al dezvoltării $(1+2)^{2n}$, $n \in \mathbb{N}^*$ este egal cu 24. Să se determine n.

5p **5.** Fie ABC un triunghi echilateral de arie $\sqrt{3}$. Să se calculeze $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.

5p **6.** Fie $a, b \in \mathbb{R}$, astfel încât $a + b = \dfrac{3\pi}{2}$. Să se arate că $\sin 2a - \sin 2b = 0$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Fie A matricea coeficienţilor sistemului $\begin{cases} 2x + y + z = 0 \\ 3x - y + mz = 0 \\ -x + 2y + z = 0 \end{cases}$, unde $m \in \mathbb{R}$.

5p **a)** Să se determine $m \in \mathbb{R}$ astfel încât sistemul să admită soluţii nenule.

5p **b)** Să se demonstreze că, dacă $m = 0$, atunci există o matrice $B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, $B \neq O_3$, astfel încât $AB = O_3$.

5p **c)** Să se arate că, dacă $m = 0$, atunci expresia $\dfrac{z_0^2 + y_0^2 + x_0^2}{z_0^2 - y_0^2 - x_0^2}$ este constantă, pentru orice soluţie nenulă a sistemului.

2. Pentru orice $a \in \mathbb{Q}$ se consideră funcţia $f_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_a(x) = \begin{cases} ax, & \text{dacă } x \in \mathbb{Q} \\ 0, & \text{dacă } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$. Fie $\mathcal{F} = \left\{ f_a \middle| a \in \mathbb{Q} \right\}$.

5p **a)** Să se arate că pentru orice $a, b \in \mathbb{Q}$, $f_a + f_b \in \mathcal{F}$ şi $f_a \circ f_b \in \mathcal{F}$.

5p **b)** Să se demonstreze că adunarea şi compunerea funcţiilor determină pe mulţimea $\mathcal{F}$ o structură de corp.

5p **c)** Să se arate că, corpurile $(\mathcal{F}, +, \circ)$ şi $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ sunt izomorfe.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcţia $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}, f(x) = e^{\frac{1}{x}}$.

5p **a)** Să se determine asimptotele la graficul funcţiei f.

5p **b)** Să se arate că, pentru orice număr real $t > 0$, funcţia îndeplineşte condiţiile din ipoteza teoremei lui Lagrange pe intervalul $[t, t+1]$.

5p **c)** Să se calculeze $\lim\limits_{x \to \infty} x^2 \left(e^{\frac{1}{x+1}} - e^{\frac{1}{x}}\right)$.

2. Fie şirul $(I_n)_{n \geq 1}$ definit prin $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \mathrm{tg}^{2n}\, t\, dt$, $n \in \mathbb{N}^*$.

5p **a)** Să se calculeze I_1.

5p **b)** Să se arate că şirul $(I_n)_{n \geq 1}$ este convergent.

5p **c)** Să se calculeze $\lim\limits_{n \to \infty} I_n$.

Varianta 86

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Să se arate că numărul $\frac{1+3i}{1-3i}+\frac{1-3i}{1+3i}\in\mathbb{R}$.

5p **2.** Numere reale a şi b au suma 5 şi produsul 2. Să se calculeze valoarea sumei $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}$.

5p **3.** Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuaţia $\sin x=\cos x$.

5p **4.** Se consideră mulţimea $A=\left\{x \mid x=C_{11}^{k}, k\in\mathbb{N}, k\le 11\right\}$. Să se calculeze probabilitatea ca, alegând un element al mulţimii A, acesta să fie divizibil cu 11.

5p **5.** Fie $ABCD$ un dreptunghi cu $AB=3$ şi $AD=6$. Să se calculeze modulul vectorului $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}$.

5p **6.** Să se calculeze suma $\cos 1^\circ+\cos 2^\circ+\cos 3^\circ+\ldots+\cos 179^\circ$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră sistemul. $\begin{cases} x+\ \ ay+\ \ (a+b)z=a+b \\ x+a^2y+(a^2+b^2)z=a^2+b^2 \\ x+a^3y+(a^3+b^3)z=a^3+b^3 \end{cases}$, unde $a,b\in\mathbb{R}$.

5p **a)** Să se determine $a,b\in\mathbb{R}$ astfel încât sistemul să fie compatibil determinat.

5p **b)** Să se arate că, pentru orice valori ale lui $a,b\in\mathbb{R}$, sistemul are soluţie.

5p **c)** Pentru $a=b=2$ şi (α,β,γ) soluţie a sistemului, să se calculeze $\alpha-\beta-2\gamma$.

2. Se consideră un inel comutativ $(A,+,\cdot)$, cu elementele neutre notate 0 pentru adunare şi 1 pentru înmulţire, şi mulţimea $\mathcal{M}_2(A)$ a matricelor pătratice de ordinul 2 cu elemente din A.

5p **a)** Să se verifice că, dacă $X=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_2(A)$, atunci $X\cdot\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a\end{pmatrix}=\det X\cdot I_2$, unde $I_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

5p **b)** Să se arate că, dacă $\det X$ este element inversabil al inelului A, atunci X este element inversabil al inelului $\mathcal{M}_2(A)$.

5p **c)** Să se determine numărul elementelor neinversabile ale inelului $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z}_3)$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}-\{-1\}\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{x^3-1}{x^3+1}$.

5p **a)** Să se scrie ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul de abscisă $x=0$.

5p **b)** Să se determine asimptotele graficului funcţiei f.

5p **c)** Să se calculeze $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3}{2}f(2)f(3)\ldots f(n)\right)^{n^2}$.

2. Fie $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,dx,\ n\in\mathbb{N}^*$.

5p **a)** Să se calculeze I_2.

5p **b)** Să se arate că $nI_n=(n-1)I_{n-2}, \forall n\ge 3$.

5p **c)** Să se calculeze $\lim_{n\to\infty} I_n$.

Varianta 87

KRt

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Fie $z\in\mathbb{C}$ o rădăcină de ordin n a unității, diferită de 1. Să se calculeze $1+z+z^2+z^3+...+z^{n-1}$.

5p **2.** Să se determine soluțiile întregi ale inecuației $x^2+x-6\le 0$.

5p **3.** Fie funcția $f:\{1,2,3,...,100\}\to\{1,2,3,...,100\}$, $f(x)=101-x$. Să se arate că funcția f este bijectivă.

5p **4.** Să se arate că numărul $n(n+1)(n+2)$ se divide cu 6, pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$.

5p **5.** Se consideră vectorii $\overrightarrow{v_1}=a\vec{i}+(a+1)\vec{j}$ și $\overrightarrow{v_2}=3\vec{i}+5\vec{j}$, cu $a\in\mathbb{R}$. Să se determine valorile lui a pentru care vectorii $\overrightarrow{v_1}$ și $\overrightarrow{v_2}$ sunt coliniari.

5p **6.** Triunghiul ABC are laturile $AB=3$, $BC=5$ și $AC=7$. Să se calculeze lungimea razei cercului înscris în triunghiul ABC.

SUBIECTUL II (30p)

1. Fie matricea $A\in\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, care are toate elementele egale cu 1.

5p **a)** Să se demonstreze că $A^2=3A$.

5p **b)** Să se demonstreze că dacă $B\in\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ este o matrice cu proprietatea $AB=BA$, atunci suma elementelor de pe fiecare linie și de pe fiecare coloană ale lui B este aceeași.

5p **c)** Să se demonstreze că matricea A^n-I_3 este inversabilă pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$.

2. Fie $n\in\mathbb{N}$, $n\ge 6$ și $\mathbb{Z}_n=\{\hat{0},\hat{1},\hat{2},...\widehat{n-1}\}$ inelul claselor de resturi modulo n.

5p **a)** Să se arate că dacă există $k\in\mathbb{N}^*$ astfel încât $n=4k+1$, atunci $\hat{1}+\hat{2}+...+\widehat{n-1}=\hat{0}$.

5p **b)** Să se arate că, dacă n nu este număr prim, atunci $\hat{1}\cdot\hat{2}\cdot...\cdot\widehat{n-1}=\hat{0}$.

5p **c)** Să se determine numărul elementelor neinversabile din inelul $\mathbb{Z}_{90}$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:(0;\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=a^x-x^a, a>0$.

5p **a)** Să se calculeze $f'(1)$.

5p **b)** Să se scrie ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x=a$.

5p **c)** Să se arate că, dacă $f(x)\ge 0, \forall x>0$, atunci $a=e$.

2. Fie $I_n=\int_1^e \ln^n x\,dx, n\in\mathbb{N}^*$.

5p **a)** Să se calculeze I_1.

5p **b)** Să se arate că $I_n=e-nI_{n-1}, \forall n\ge 2$.

5p **c)** Să se arate că șirul $(I_n)_{n\ge 1}$ este convergent.

Varianta 88

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Se consideră numărul complex $z = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$. Să se calculeze z^9.

5p **2.** Să se determine imaginea intervalului $[-2,1]$ prin funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x) = -x^2 - 2x$.

5p **3.** Să se rezolve ecuaţia $\arcsin(1-x) + \arccos x = \frac{\pi}{2}$.

5p **4.** Fie mulţimea $A = \{1,2,3,4,5\}$ şi M mulţimea funcţiilor f definite pe A cu valori în A. Să se calculeze probabilitatea ca, alegând o funcţie din mulţimea M, aceasta să fie bijectivă.

5p **5.** Fie triunghiul ABC şi punctele $M(0,3)$, $N(1,1)$, $P(-1,2)$ mijloacele laturilor AB, BC, respectiv AC. Să se calculeze coordonatele punctelor A, B şi C.

5p **6.** Fie $a \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, astfel încât $\sin a = \frac{4}{5}$. Să se calculeze $\operatorname{tg}\frac{a}{2}$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Fie matricea $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Se notează cu A^t transpusa matricei A şi cu $\operatorname{Tr}(A)$ suma elementelor de pe diagonala principală a matricei A.

5p **a)** Să se demonstreze că $\operatorname{Tr}(A + A^t) = 2\operatorname{Tr}(A)$.

5p **b)** Să se demonstreze că dacă $\operatorname{Tr}(A \cdot A^t) = 0$, atunci $A = O_3$.

5p **c)** Să se demonstreze că dacă suma elementelor matricei $A \cdot A^t$ este egală cu 0, atunci $\det A = 0$.

2. Se consideră matricele $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ şi mulţimea $K = \{aI_2 + bA \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$.

5p **a)** Să se verifice dacă matricea A^2 aparţine mulţimii K.

5p **b)** Să se arate că $X + Y \in K$ şi $XY \in K$ pentru orice $X, Y \in K$.

5p **c)** Să se arate că operaţiile de adunare şi înmulţire a matricelor din $\mathcal{M}_2(\mathbb{Q})$ determină pe mulţimea K o structură de corp comutativ.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x) = \arcsin\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$.

5p **a)** Să se arate că $f(x) = \operatorname{arctg} x$.

5p **b)** Să se scrie ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul de abscisă $x = 1$.

5p **c)** Să se arate că funcţia $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ g(x) = (x-1)f(x)$ admite exact un punct de extrem.

2. Se consideră şirul $(I_n)_{n\geq 1}, I_n = \int_0^1 x^{2n}\sin x\,dx$.

5p **a)** Să se calculeze I_1.

5p **b)** Să se arate că şirul $(I_n)_{n\geq 1}$ este convergent.

5p **c)** Să se demonstreze că $I_n = 2n\sin 1 - \cos 1 - 2n(2n-1)I_{n-1}, \forall n \geq 2$.

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Să se determine numerele complexe z care verifică relația $z+3i=6\cdot\bar{z}$.

5p **2.** Să se rezolve ecuația $|1-2x|=|x+4|$.

5p **3.** Să se determine imaginea funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\dfrac{x}{1+4x^2}$.

5p **4.** Să se determine numărul funcțiilor strict monotone $f:\{1,2,3\}\to\{5,6,7,8\}$.

5p **5.** Să se demonstreze că pentru orice punct M din planul paralelogramului $ABCD$ are loc egalitatea $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MD}$.

5p **6.** Fie a şi b numere reale, astfel încât $a+b=\dfrac{\pi}{3}$. Să se arate că $\sin 2a-\sin 2b-\sin(a-b)=0$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră sistemul de ecuații liniare $\begin{cases} x_1-x_2=a \\ x_3-x_4=b \\ x_1+x_2+x_3+x_4=1 \end{cases}$, unde $a,b\in\mathbb{R}$.

5p **a)** Să se arate că, pentru orice valori ale lui a şi b, sistemul este compatibil,

5p **b)** Să se determine $a,b\in\mathbb{R}$ astfel încât sistemul să admită o soluție (x_1,x_2,x_3,x_4) cu proprietatea că x_1,x_2,x_3,x_4 şi x_1+x_2 sunt termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice.

5p **c)** Să se demonstreze că, dacă sistemul are o soluție cu toate componentele strict pozitive, atunci $a+b<1$.

2. Fie $(G,\cdot)$ un grup finit, e elementul său neutru şi $x,y\in G$.

5p **a)** Să se determine ordinul lui $x=\hat{9}$ în grupul aditiv $(\mathbb{Z}_{24},+)$.

5p **b)** Să se demonstreze că xy şi yx au acelaşi ordin.

5p **c)** Să se demonstreze că, dacă $xy=yx$, m şi n sunt numere naturale prime între ele, $\operatorname{ord}(x)=m$ şi $\operatorname{ord}(y)=n$, atunci $\operatorname{ord}(xy)=mn$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Pentru fiecare $a>0$, se consideră funcția $f_a:(0;\infty)\to\mathbb{R},\ f_a(x)=(x+a)\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$.

5p **a)** Să se calculeze $f_a'(x),\ x>0$.

5p **b)** Să se determine a astfel încât funcția f_a să fie convexă pe tot domeniul de definiție.

5p **c)** Să se arate că graficul funcției f_a admite asimptotă spre $+\infty$.

2. Fie $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x\,dx,\ n\in\mathbb{N}^*$.

5p **a)** Să se calculeze I_2.

5p **b)** Să se arate că $nI_n=(n-1)I_{n-2},\ \forall n\geq 3$.

5p **c)** Să se demonstreze că $nI_{n+1}\leq nI_n\leq(n+1)I_{n+1},\ \forall n\geq 1$.

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Se consideră progresia aritmetică $(a_n)_{n\geq 1}$ având rația 3. Știind că suma primilor 10 termeni ai progresiei este 150, să se afle a_1.

5p **2.** Să se determine toate perechile (a,b) de numere reale pentru care $a^2+b^2=a^3+b^3=2$.

5p **3.** Să se rezolve ecuația $\lg x+\lg(9-2x)=1$.

5p **4.** Câte numere de cinci cifre au cifrele distincte?

5p **5.** Se consideră punctele $A(0,2), B(1,-1)$ și $C(5,1)$. Să se determine ecuația dreptei duse din A perpendiculară pe dreapta BC.

5p **6.** Să se arate că $1+\cos\frac{2\pi}{5}+\cos\frac{4\pi}{5}+\cos\frac{6\pi}{5}+\cos\frac{8\pi}{5}=0$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră mulțimea $G=\left\{A_x=\begin{pmatrix}1 & 2x & 5x^2-2x\\ 0 & 1 & 5x\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \middle| x\in\mathbb{R}\right\}$.

5p **a)** Să se arate că A_x este inversabilă, pentru orice $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Să se demonstreze că $A_xA_y\in G, \forall x,y\in\mathbb{R}$.

5p **c)** Fie $n\in\mathbb{N}^*$ un număr fixat. Să se determine $x\in\mathbb{R}$ astfel încât ecuația $(A_x)^n=I_3$ să admită soluții.

2. Pe mulțimea de numere complexe $\mathbb{Z}[i]=\{a+bi \mid a,b\in\mathbb{Z}\}$ se definește legea de compoziție „$*$” prin $(a+bi)*(c+di)=ac+bdi, \forall a,b,c,d\in\mathbb{Z}$.

5p **a)** Să se demonstreze că $(\mathbb{Z}[i],*)$ este monoid comutativ.

5p **b)** Să se arate că $(\mathbb{Z}[i],+,*)$ este un inel cu divizori ai lui zero.

5p **c)** Să se determine elementele inversabile ale inelului $(\mathbb{Z}[i],+,*)$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcțiile $f_n:(0;\infty)\to\mathbb{R}, f_n(x)=x^n+\ln x, n\in\mathbb{N}^*$.

5p **a)** Să se studieze monotonia funcției f_n, $n\in\mathbb{N}^*$.

5p **b)** Să se demonstreze că, pentru orice număr natural nenul n, funcția f_n este bijectivă.

5p **c)** Să se arate că, dacă x_n este soluția ecuației $f_n(x)=0$, atunci șirul $(x_n)_{n\geq 1}$ converge crescător la 1.

2. Fie $a\in[0,1]$ și $I_n=\int_0^a\frac{x^n}{x+1}dt, n\in\mathbb{N}^*$.

5p **a)** Să se calculeze I_2.

5p **b)** Să se demonstreze că $I_n+I_{n-1}=\frac{a^n}{n}, \forall n\geq 2$.

5p **c)** Să se arate că $\lim_{n\to\infty} I_n=0$.

Varianta 91

KRI

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Să se calculeze modulul numărului complex $z=\left(\sqrt{3-2\sqrt{2}}+i\sqrt{3+2\sqrt{2}}\right)^4$.

5p **2.** Să se determine numerele reale x şi y astfel încât $x+2y=1$ şi $x^2-6y^2=1$.

5p **3.** Fie funcţia $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}, f(z)=i\bar{z}$. Să se arate că f este o funcţie bijectivă.

5p **4.** Să se calculeze $C_{10}^3-C_9^3$.

5p **5.** Fie $ABCD$ un paralelogram. Dacă vectorii $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$ şi $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}$ au acelaşi modul, să se arate că $ABCD$ este dreptunghi.

5p **6.** Să se demonstreze că $\dfrac{1}{\sin 10^\circ}-\dfrac{\sqrt{3}}{\cos 10^\circ}=4$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră mulţimea G formată din toate matricele de ordin 3, cu elementele din mulţimea $\{-1,1\}$, astfel încât produsul elementelor de pe fiecare linie, respectiv coloană, este egal cu -1.

5p **a)** Să se demonstreze că numărul elementelor egale cu -1 ale unei matrice din G este 3, 5 sau 9.

5p **b)** Să se demonstreze că dacă o matrice $A\in G$ este inversabilă, atunci $A^{-1}\notin G$.

5p **c)** Să se determine mulţimea valorilor funcţiei $f:G\to\mathbb{R}, f(X)=\det X$.

2. Fie polinomul $f=2X^4+2(a-1)X^3+(a^2+3)X^2+bX+c\in\mathbb{R}[X]$.

5p **a)** Să se afle $a,b,c\in\mathbb{R}$ astfel încât X^2 să dividă f, iar restul împărţirii lui f la $X+1$ să fie 10.

5p **b)** Ştiind că $x_1,x_2,x_3,x_4\in\mathbb{C}$ sunt rădăcinile lui f, să se calculeze $x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2$.

5p **c)** Să se determine $a,b,c\in\mathbb{R}$ şi rădăcinile polinomului f în cazul în care acesta are toate rădăcinile reale.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\dfrac{2x^3}{x^2+1}$.

5p **a)** Să se arate că graficul funcţiei f admite asimptotă spre $+\infty$.

5p **b)** Să se arate că funcţia f este inversabilă.

5p **c)** Să se calculeze derivata inversei funcţiei f în punctul 0.

2. Fie funcţiile $F,f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=e^{\sin^2 x},\ F(x)=\int_0^x f(t)dt$.

5p **a)** Să se demonstreze că F este strict crescătoare.

5p **b)** Să se arate că, pentru orice $x>0$, există $c_x\in(0,x)$ astfel încât $F(x)=xf(c_x)$.

5p **c)** Să se calculeze $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{F(x)}{x}$.

Varianta 92

KRItm

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Numerele reale pozitive a,b,c,d sunt în progresie geometrică. Ştiind că $d-a=7$ şi $c-b=2$, să se afle raţia progresiei.

5p **2.** Să se determine valorile reale ale lui m ştiind că $\frac{mx^2+x-2}{x^2+1}\le 0$, oricare ar fi $x\in\mathbb{R}$.

5p **3.** Să se rezolve în intervalul $(0,5)$ ecuaţia $\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{1}{2}$.

5p **4.** Să se determine numărul $n=C_{10}^0-C_{10}^2+C_{10}^4-C_{10}^6+C_{10}^8$.

5p **5.** Să se determine valorile reale ale lui a pentru care vectorii $\vec{u}=(a-1)\vec{i}-(2a+2)\vec{j}$ şi $\vec{v}=(a+1)\vec{i}-\vec{j}$ sunt perpendiculari.

5p **6.** Fie $\alpha\in\left(\pi,\frac{3\pi}{2}\right)$ astfel încât $\cos\alpha=-\frac{1}{3}$. Să se calculeze $\sin 2\alpha$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Fie matricea $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & -1\end{pmatrix}$ şi mulţimea $G=\{X\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})\mid AXA^t=O_2\}$, unde A^t este transpusa matricei A.

5p **a)** Să se arate că dacă $X,Y\in G$, atunci $X+Y\in G$.

5p **b)** Să se arate că dacă $X\in G$, suma elementelor lui X este egală cu 0.

5p **c)** Să se arate că dacă $X\in G$ şi $\det X=0$, atunci $X^n\in G$ pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$.

2. Se consideră ecuaţia $x^4-6x^3+18x^2-30x+25=0$, despre ale cărei rădăcini $x_1,x_2,x_3,x_4\in\mathbb{C}$ se ştie că au acelaşi modul.

5p **a)** Să se determine $|x_1|$.

5p **b)** Să se arate că ecuaţia nu are rădăcini reale.

5p **c)** Să se determine soluţiile ecuaţiei.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcţia $f:(1;\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=\ln(\ln x)$.

5p **a)** Să se determine ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul de abscisă $x=e$.

5p **b)** Sa se demonstreze că $\frac{1}{(k+1)\ln(k+1)}<\ln(\ln(k+1))-\ln(\ln k)<\frac{1}{k\ln k}, k\in\mathbb{N}, k\ge 2$.

5p **c)** Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2\ln 2}+\frac{1}{3\ln 3}+\ldots+\frac{1}{n\ln n}\right)$.

2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{\cos x}{1+\sin^2 x}$.

5p **a)** Să se calculeze $\int_0^{\pi} f(x)\,dx$.

5p **b)** Să se arate că orice primitivă a lui f este strict crescătoare pe $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$.

5p **c)** Pentru $n\in\mathbb{N}^*$, să se calculeze $\int_0^{2n\pi} xf(x)\,dx$.

Varianta 93

KRLtm

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Fie z o rădăcină a ecuației $z^2 + 2z + 4 = 0$. Să se calculeze modulul numărului complex z.

5p **2.** Să se determine funcțiile de gradul întâi $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, care sunt strict crescătoare şi îndeplinesc condiția $f(f(x)) = 4x + 3,\ \forall x \in \mathbb{R}$.

5p **3.** Să se rezolve ecuația $2^x + 4^{\frac{x+1}{2}} + 8^{\frac{x+2}{3}} = 7 \cdot 16^{\frac{2x-1}{4}}$.

5p **4.** Care este probabilitatea ca, alegând un număr natural de la 1 la 1000, acesta să fie cub perfect?

5p **5.** Fie ABC un triunghi în care mediana dusă din A este perpendiculară pe latura AB. Ştiind că $AB = 1$ şi $AC = 2$, să se calculeze măsura unghiului A.

5p **6.** Să se determine $\alpha \in (0, 2\pi)$ astfel ca $\operatorname{tg} \alpha = \sin \alpha$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Fie $n \in \mathbb{N},\ n \geq 3$. Pentru fiecare $\sigma \in S_n$ se defineşte permutarea $\overline{\sigma}$ prin $\overline{\sigma}(i) = \sigma(n - i + 1),\ \forall i = \overline{1,n}$.
Se notează $m(\sigma)$ numărul de inversiuni al permutării σ.

5p **a)** Să se calculeze $m(\alpha) + m(\overline{\alpha})$, pentru $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in S_5$.

5p **b)** Să se demonstreze că dacă $\sigma \in S_n$ este o permutare cu proprietatea $\overline{\sigma} = \sigma^{-1}$, atunci $\sigma^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & n-1 & n \\ n & n-1 & n-2 & \ldots & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

5p **c)** Să se demonstreze că, pentru orice $\sigma \in S_n$, $m(\sigma) + m(\overline{\sigma}) = C_n^2$.

2. Fie $a, b \in \mathbb{R}$ şi polinomul $f = X^{30} - 3X^{20} + aX^{10} + 3X^5 + aX + b \in \mathbb{R}[X]$.

5p **a)** Să se arate că restul împărțirii polinomului f la $X + 1$ nu depinde de a .

5p **b)** Să se determine a şi b astfel încât restul împărțirii polinomului f la $X^2 - X$ să fie X .

5p **c)** Să se determine a şi b astfel încât polinomul f să fie divizibil cu $(X - 1)^2$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Pentru fiecare $t \in \mathbb{R}$, se consideră funcția $f_t : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_t(x) = x^3 + t^2 x$.

5p **a)** Să se calculeze $f_t'(x),\ x \in \mathbb{R}$.

5p **b)** Să se arate că funcția f_t este inversabilă.

5p **c)** Să se arate că funcția $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ g(t) = f_t^{-1}(1)$ este continuă în punctul 0.

2. Fie funcția $f : (-1,1) \to \mathbb{R},\ f(x) = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\arcsin x} \ln(1 + \sin^2 t)dt$.

5p **a)** Să se calculeze $f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

5p **b)** Să se calculeze $f'(x)$, $x \in (-1,1)$.

5p **c)** Să se calculeze $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} f(y)dy$.

Varianta 94

KRt

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Să se dea un exemplu de progresie geometrică, care are rația număr irațional şi conține o infinitate de termeni raționali.

5p **2.** Să se arate că funcția $f:(-1,1)\to\mathbb{R},\ f(x)=\ln\frac{1-x}{1+x}$ este impară.

5p **3.** Să se rezolve ecuația $5^x+5^{-x}=2$.

5p **4.** Care este probabilitatea ca, alegând un număr de trei cifre, prima sa cifră să fie număr prim?

5p **5.** Fie ABC un triunghi şi O centrul cercului circumscris lui. Ştiind că $\overrightarrow{BO}=\overrightarrow{OC}$, să se arate că triunghiul ABC este dreptunghic.

5p **6.** Fie $\alpha\in\mathbb{R}$, astfel încât $\sin\alpha+\cos\alpha=1$. Să se calculeze $\operatorname{tg} 2\alpha$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Fie $A=\begin{pmatrix}3 & -2\\ 6 & -4\end{pmatrix}$ şi mulțimea $M=\left\{X(a)\,\middle|\,X(a)=I_2+aA,\ a\in\mathbb{R}\right\}$.

5p **a)** Să se demonstreze că $X(a)X(b)\in M,\ \forall\, a,b\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Să se arate că există $e\in\mathbb{R}$ astfel încât $X(a)\cdot X(e)=X(e)$, pentru orice $a\in\mathbb{R}$.

5p **c)** Să se calculeze produsul $X(2)X(3)\ldots X(2008)$.

2. Fie $f\in\mathbb{R}[X]$ un polinom astfel încât $f\left(X^2+3X+1\right)=f^2(X)+3f(X)+1$ şi $f(0)=0$.

5p **a)** Să se determine $f(-1)$.

5p **b)** Să se determine restul împărțirii polinomului f la $X-5$.

5p **c)** Să se demonstreze că $f=X$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcțiile $f_n:[0;\infty)\to\mathbb{R},\ f_n(x)=x^{n+1}-(n+2)x+n,\ n\in\mathbb{N}^*$.

5p **a)** Să se arate că graficele funcțiilor f_n nu admit asimptotă spre $+\infty$.

5p **b)** Să se arate că, pentru $\forall n\in\mathbb{N}^*$, ecuația $f_n'(x)=0$ are o unică soluție în $[0,\infty)$.

5p **c)** Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n)^{n^2}$, unde x_n este unica soluție a ecuației $f_n'(x)=0$.

2. Fie $I_n=\int_0^1\frac{x^{2n}}{1+x^2}dx,\ n\in\mathbb{N}^*$.

5p **a)** Să se calculeze I_1.

5p **b)** Să se arate că $I_{n+1}+I_n=\frac{1}{2n+1},\forall n\geq 1$.

5p **c)** Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}I_n$.

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Fie $x \in \mathbb{R}^*$. Să se arate că $\left[\frac{1}{x}\right] = 0$ dacă şi numai dacă $x > 1$. ($[x]$ reprezintă partea întreagă a lui x)

5p **2.** Să se rezolve ecuaţia $x + \frac{1}{|1+x|} = 1$.

5p **3.** Fie $a \in (0,\infty)$, $a \neq 1$. Să se studieze monotonia funcţiei $f:(0,\infty) \to \mathbb{R}, f(x) = a^x + \log_a x$.

5p **4.** Care este probabilitatea ca, alegând un număr de trei cifre, produsul cifrelor sale să fie impar?

5p **5.** Să se demonstreze că vectorii $\vec{u} = 3\vec{i} + a\vec{j}$ şi $\vec{v} = (a+1)\vec{i} + a\vec{j}$ nu pot fi perpendiculari pentru nicio valoare reală a numărului a.

5p **6.** Să se arate că $\sin x + \sin 3x + \sin 5x = (1 + 2\cos 2x) \cdot \sin 3x$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră $n \in \mathbb{N}^*$, matricea $A_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, care are elementele de pe diagonala principală egale cu 2 şi restul elementelor egale cu 1.

5p **a)** Să se determine valorile lui $x \in \mathbb{R}$ pentru care matricea $A_3 + xI_3$ este singulară.

5p **b)** Să se arate că $\det A_n$ este un număr întreg, divizibil cu $n+1$.

5p **c)** Să se arate că A_4 are inversă, aceasta având elementele de pe diagonala principală egale cu $\frac{4}{5}$ şi restul elementelor egale cu $-\frac{1}{5}$.

2. Fie $a,b,c \in \mathbb{R}$ şi polinomul $f = X^3 - aX^2 + bX - c \in \mathbb{R}[X]$ cu rădăcinile $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{C}$.

5p **a)** Să se determine a,b,c pentru care $x_1 = 2$ şi $x_2 = 1+i$.

5p **b)** Să se arate că resturile împărţirii polinomul *f* la $(X-1)^2$ şi la $(X-2)^2$ nu pot fi egale, pentru nicio valoare a parametrilor a,b,c.

5p **c)** Să se arate că, dacă toate rădăcinile polinomului *f* sunt reale şi a,b,c sunt strict pozitive, atunci x_1, x_2, x_3 sunt strict pozitive.

SUBIECTUL III (30p)

1. Fie funcţiile $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \operatorname{arctg} x$ şi $g:\mathbb{R} \to \mathbb{R}, g(x) = f(x+1) - f(x) - f\left(\frac{1}{1+x+x^2}\right)$.

5p **a)** Să se arate că graficul funcţiei f admite asimptotă spre $+\infty$.

5p **b)** Să se arate că $g(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

5p **c)** Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{1+1+1^2} + \operatorname{arctg}\frac{1}{1+2+2^2} + \operatorname{arctg}\frac{1}{1+3+3^2} + \ldots + \operatorname{arctg}\frac{1}{1+n+n^2}\right)$.

2. Fie $I_n = \int_0^1 e^{-x}x^n dx, n \in \mathbb{N}^*$.

5p **a)** Să se calculeze I_1.

5p **b)** Să se arate că $I_n = nI_{n-1} - \frac{1}{e}$, pentru orice $n \geq 2$.

5p **c)** Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} I_n$.

Varianta 96

KRt

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Fie a,b,c numere naturale nenule în progresie geometrică. Ştiind că $a+b+c$ este un număr par, să se arate că numerele a,b,c sunt pare.

5p **2.** Fie funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x^2+3x+2$. Să se arate că $f(a)+f(a+1)\geq 0$, oricare ar fi $a\in\mathbb{R}$.

5p **3.** Să se rezolve inecuaţia $\log_2 x+\log_4 x>3$.

5p **4.** Să se determine numerele naturale n pentru care $C_n^1+C_n^2=120$.

5p **5.** Se consideră vectorii $\vec{u}=2\vec{i}-a\vec{j}$ şi $\vec{v}=\vec{i}+\vec{j}$. Să se arate că unghiul format de cei doi vectori este obtuz dacă şi numai dacă $a>2$.

5p **6.** Fie ABC un triunghi cu $\sin A=\frac{1}{2}, \sin B=1$ şi $BC=4$. Să se calculeze aria triunghiului ABC.

SUBIECTUL II (30p)

1. Pentru orice matrice $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ se notează $\mathrm{Tr}(A)=a+d$.

5p **a)** Să se demonstreze că $A^2-\mathrm{Tr}(A)A+(\det A)I_2=0_2$.

5p **b)** Să se demonstreze că, dacă $\mathrm{Tr}(A)=0$, atunci $A^2B=BA^2$, pentru orice matrice $B\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

5p **c)** Să se arate că dacă $\mathrm{Tr}(A)\neq 0$, $B\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ şi $A^2B=BA^2$, atunci $AB=BA$.

2. Fie $a,b\in\mathbb{R}$ şi polinomul $f=X^4-6X^3+13X^2+aX+b\in\mathbb{R}[X]$.

5p **a)** Să se determine a,b astfel încât polinomul f să fie divizibil cu $(X-1)(X-3)$.

5p **b)** Să se determine a,b astfel încât polinomul f să aibă două rădăcini duble.

5p **c)** Să se arate că, pentru nicio valoare a parametrilor reali a,b, polinomul nu are o rădăcină triplă raţională.

SUBIECTUL III (30p)

1. Fie mulţimea $A=\mathbb{R}\setminus\{1,2,3,...,2008\}$ şi funcţia $f:A\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-2}+\frac{1}{x-3}+...+\frac{1}{x-2008}$.

5p **a)** Să se determine asimptotele graficului funcţiei f.

5p **b)** Dacă $a\in\mathbb{R}$, să se determine numărul soluţiilor reale ale ecuaţiei $f(x)=a$.

5p **c)** Să se determine numărul punctelor de inflexiune ale graficului funcţiei f

2. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\int_0^x e^{-t^2}\,dt$.

5p **a)** Să se arate că f este strict crescătoare.

5p **b)** Să se arate că f este concavă pe intervalul $[0,\infty)$.

5p **c)** Să se arate că şirul $(f(n))_{n\geq 1}$ este convergent.

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Să se ordoneze crescător numerele $3!$, $\sqrt[3]{100}$, $\log_2 32$.

5p **2.** Să se arate că $x^2+3xy+4y^2 \geq 0$, oricare ar fi $x, y \in \mathbb{R}$.

5p **3.** Să se rezolve în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\sin 2x = \cos x$.

5p **4.** Să se calculeze $A_5^3 - 4C_6^2$.

5p **5.** În sistemul de coordonate xOy se consideră punctele A,B,C astfel încât $A(1,3), B(2,5)$ şi $\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AB}$. Să se determine coordonatele punctului C.

5p **6.** Fie ABC un triunghi care are $AB=5, AC=6$ şi $\cos A = \frac{3}{5}$. Să se calculeze lungimea razei cercului circumscris triunghiului ABC.

SUBIECTUL II (30p)

1. Fie $n \in \mathbb{N}^*$ şi $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & n & n+1 & n+2 & n+3 & \ldots & 2n+1 \\ 1 & 3 & 5 & \ldots & 2n-1 & 2n+1 & 2 & 4 & \ldots & 2n \end{pmatrix} \in S_{2n+1}$.

5p **a)** Să se determine numărul de inversiuni ale permutării σ.

5p **b)** Pentru $n=3$, să se rezolve ecuaţia $\sigma^{-1}x = \sigma$.

5p **c)** Să se arate că pentru orice permutare $\tau \in S_{2n+1}$ există $k \in \{1,2,\ldots,2n+1\}$ astfel încât $k+\tau(k)$ să fie număr par.

2. Fie $n \in \mathbb{N}^*$ şi polinomul $f = X^{3n} + 2X^2 - 4X - 1 \in \mathbb{C}[X]$.

5p **a)** Să se arate că f nu este divizibil cu polinomul $g = X-2$, pentru nicio valoare a lui n.

5p **b)** Să se determine suma coeficienţilor câtului împărţirii polinomului f la $X-1$.

5p **c)** Să se arate că restul împărţirii polinomului f la polinomul $h = X^2+X+1$ nu depinde de n.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x) = \operatorname{arctg} x$.

5p **a)** Să se arate că funcţia f este concavă pe intervalul $[0,\infty)$.

5p **b)** Să se determine $a \in \mathbb{R}$ pentru care limita $\lim\limits_{x\to\infty} x^a\left(f(x+1)-f(x)\right)$ este finită şi nenulă.

5p **c)** Să se rezolve inecuaţia $f(x) < x - \frac{x^3}{3}$.

2. Fie funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{(1+x^2)^2}$.

5p **a)** Să se calculeze $\int_0^1 x(1+x^2)f(x)dx$.

5p **b)** Să se arate că, dacă $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$, atunci funcţia $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $F(x) = \int_0^x t^{2n} f(t)dt$ este bijectivă.

5p **c)** Să se arate că, pentru orice $a \in \mathbb{R}$, $\int_1^a f(x)dx < \frac{1}{4}$.

Varianta 98

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Fie $z \in \mathbb{C}$ astfel încât $z + 2\bar{z} = 3 + i$. Să se calculeze modulul numărului z.

5p **2.** Să se dea un exemplu de ecuație de gradul al doilea cu coeficienți reali care să aibă una dintre rădăcini egală cu $\sqrt{3}$.

5p **3.** Să se rezolve ecuația $\log_x 2 + \log_{\sqrt{x}} 2 = 9$.

5p **4.** Fie mulțimea $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Să se determine numărul submulțimilor cu trei elemente ale mulțimii A care conțin cel puțin un număr par.

5p **5.** Fie G centrul de greutate al triunghiului ABC. Să se determine $a, b \in \mathbb{R}$ astfel încât să avem egalitatea $a\overrightarrow{GA} + b\overrightarrow{GB} = \overrightarrow{GC}$.

5p **6.** Fie $a, b \in \left(\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, astfel încât $a - b = \frac{\pi}{2}$. Să se arate că $\operatorname{tg} a \operatorname{tg} b = -1$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Fie sistemul de ecuații liniare $\begin{cases} mx + y - z = 1 \\ x + y - z = 2 \\ -x + y + z = 0 \end{cases}$, unde $m \in \mathbb{R}$.

5p **a)** Să se determine $m \in \mathbb{R}$ astfel încât matricea sistemului să aibă rangul 2.

5p **b)** Să se determine mulțimea valorilor lui $m \in \mathbb{R}$ astfel încât sistemul să aibă soluții $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$ care verifică relația $x_0 + y_0 + z_0 = 4$.

5p **c)** Să se determine $m \in \mathbb{Z}$ astfel încât sistemul să aibă o soluție unică $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{Z}^3$.

2. Fie $p \in \mathbb{R}$ şi polinomul $f = X^{2008} - 2008X + p \in \mathbb{R}[X]$.

5p **a)** Să se determine p astfel încât polinomul f să fie divizibil cu $X + 1$.

5p **b)** Să se determine p astfel încât polinomul f să aibă o rădăcină dublă reală.

5p **c)** Să se demonstreze că dacă polinomul f are o rădăcină complexă $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, atunci $|\alpha| \geq 1$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Pentru fiecare $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ se defineşte funcția $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = x^n + nx - 1$.

5p **a)** Să se arate că, pentru orice $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$, funcția f_n este convexă.

5p **b)** Să se arate că, pentru orice $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$, ecuația $f_n(x) = 0$ are soluție unică.

5p **c)** Să se calculeze $\lim\limits_{n \to \infty} x_n$, unde x_n este unica soluție a ecuației $f_n(x) = 0$.

2. Fie funcțiile $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{e^x}{1 + e^x}$, $g(x) = \int_{-x}^{x} f(t) \cos t \, dt$.

5p **a)** Să se calculeze $\int_0^1 f(x) dx$.

5p **b)** Să se calculeze $g'(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

5p **c)** Să se calculeze $g\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Fie n un număr natural. Să se arate că partea întreagă a numărului $\sqrt{n^2+n}$ este egală cu n.

5p **2.** Fie f o funcție de gradul întâi. Să se arate că funcția $f \circ f$ este strict crescătoare.

5p **3.** Să se rezolve ecuația $2x+\sqrt{16+x^2}=11$.

5p **4.** Câte funcții $f:\{1,2,3,\ldots,10\}\to\{0,1\}$ au proprietatea că $f(1)+f(2)+f(3)+\ldots+f(10)=2$?

5p **5.** Se consideră punctele $M(1,2), N(2,5)$ şi $P(3,m)$, $m\in\mathbb{R}$. Să se determine valorile reale ale lui m astfel încât $\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{MP}=5$.

5p **6.** Să se determine cel mai mare element al mulțimii $\{\cos 1, \cos 2, \cos 3\}$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Fie matricea $A\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Se consideră matricea $J\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, care are toate elementele egale cu 1, şi funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\det(AA^t+xJ)$.

5p **a)** Să se arate că $f(0)\geq 0$.

5p **b)** Să se arate că există $a,b\in\mathbb{R}$ astfel încât $f(x)=ax+b$, $\forall x\in\mathbb{R}$.

5p **c)** Să se arate că funcția f este crescătoare.

2. Fie $K=\{f=aX+b \mid a,b\in\mathbb{Z}_3\}$. Pe K definim legea de compoziție $(f,g)\to f*g=r_{f,g}$, unde $r_{f,g}$ este restul împărțirii polinomului fg la $X^2+\hat{1}$.

5p **a)** Să se calculeze $f*g$ pentru $f=\hat{2}X+\hat{1}$ şi $g=X+\hat{2}$.

5p **b)** Să se arate că operația "$*$" are element neutru.

5p **c)** Fie $K_0=K\setminus\{\hat{0}\}$. Să se arate că $(K_0,*)$ este grup abelian.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt[3]{x^3+3x^2+2x+1}-\sqrt[3]{x^3-x+1}$.

5p **a)** Să se scrie ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x=0$.

5p **b)** Să se arate că graficul funcției admite asimptotă spre $+\infty$.

5p **c)** Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{f(1)+f(2)+\ldots+f(n)}{n}\right)^n$.

2. Se consideră funcțiile $f_n:(0,\infty)\to\mathbb{R}, f_n(x)=\int_{\frac{1}{e}}^{x} t^n \ln t\,dt$, $n\in\mathbb{N}^*$.

5p **a)** Să se calculeze $f_1(e)$.

5p **b)** Să se arate că funcțiile f_n sunt descrescătoare pe intervalul $(0,1)$.

5p **c)** Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(1)$.

Varianta 100

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Să se arate că $\sqrt{3} \notin \left\{a+b\sqrt{2} \mid a,b \in \mathbb{Z}\right\}$.

5p **2.** Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația $|1+x| = 1-x$.

5p **3.** Să se determine valorile reale ale lui x pentru care $\sqrt[6]{x^2-2x+1} = \sqrt[3]{3-x}$.

5p **4.** Să se arate că 7 divide C_7^k, oricare ar fi $k \in \{1,2,3,4,5,6\}$.

5p **5.** Fie ABC un triunghi şi G centrul său de greutate. Ştiind că $A(1,1), B(5,2)$ şi $G(3,4)$, să se calculeze coordonatele punctului C.

5p **6.** Fie $a \in \mathbb{R}$ cu $\operatorname{tg} a = \dfrac{2}{5}$. Să se calculeze $|\sin a|$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Fie matricea $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 6 & -4 \end{pmatrix}$.

5p **a)** Să se demonstreze că $(I_2 + A)^2 = I_2 + A$.

5p **b)** Să se demonstreze că mulțimea $\{A^n \mid n \in \mathbb{N}^*\}$ este finită.

5p **c)** Să se arate că matricea $B_n = I_2 - A + A^2 - A^3 + \ldots + (-1)^n A^n$ este inversabilă, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.

2. Fie $n \in \mathbb{N}, n \geq 3, a,b \in \mathbb{Z}, a \neq b$, $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{Z}$ şi polinomul $f = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \ldots + a_1 X + a_0$.

5p **a)** Să se arate că $f(1) + f(-1)$ este număr par.

5p **b)** Să se arate că, dacă $f(a)$, $f(b)$ şi $a+b$ sunt impare, atunci ecuația $f(x) = 0$ nu are rădăcini întregi.

5p **c)** Să se arate că polinomul $g = X^3 - X + 3a + 1$ nu poate fi descompus în produs de două polinoame neconstante, cu coeficienți întregi.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = e^{nx} + nx + 1, n \in \mathbb{N}^*$.

5p **a)** Să se arate că funcția f este strict crescătoare.

5p **b)** Să se arate că funcția f este inversabilă.

5p **c)** Să se calculeze derivata inversei funcției f în punctul 2.

2. Fie $I_n = \int_{-1}^{1} t^n \arcsin t \, dt$, unde $n \in \mathbb{N}^*$ şi $I_0 = \int_{-1}^{1} \arcsin t \, dt$.

5p **a)** Să se calculeze I_0.

5p **b)** Să se calculeze $\lim\limits_{n \to \infty} I_n$.

5p **c)** Să se arate că $I_{2n-1} \geq \dfrac{2}{2n+1}, \forall n \in \mathbb{N}^*$.